SECTION MATHS

CORRIGÉ DU SUJET DE MATHS
BAC 2018 SESSION PRINCIPALE

PROPOSÉ PAR
M^r SALAH HANNACHI

EXERCICE N1 :

1) a) Dans le triangle rectangle BCD on a : $\tan\widehat{CBD} = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$. D'autre part dans le triangle rectangle IHB on a : $\tan\widehat{CBD} = \frac{IH}{IB}$ alors $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$ $(\star)$

b) Dans le triangle IDB on a : E=I⋆D et H=B⋆D alors (EH)∥(IB) et EH= $\frac{1}{2}$IB

Or (IB)⊥(IH) et IH= $\frac{1}{2}$IB d'après $(\star)$, alors IH=EH et $\widehat{IHE} = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle IHE est rectangle et isocèle en H et comme EHI est un triangle direct alors R(I)=E.

2) a) f(H)=hoR(H)=h(H)=B car H=B⋆D. D'où f(H)=B

b) f(I)=hoR(I)=h(E) et h(E)=I car E=I⋆D, alors f(I)=I

c) f est la compose d'une homothétie h et d'un déplacement R alors f est une similitude directe de rapport k=2 (le rapport positif de l'homothétie h), de centre I (car f(I)=I et k≠ 1) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (l'angle de la rotation R).

d) Dans les deux triangles IAC et CBD on a : $\widehat{CIA} = \widehat{CDB} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BCD} = \widehat{ICA}$ (angle commun)

alors par conséquent $\widehat{IAC} = \widehat{CBD}$ donc $\frac{IC}{IA} = \tan\widehat{CBD} = \frac{1}{2}$ d'où IA= 2.IC

D'autre part (IA)⊥(IC), et comme le triangle AIC est direct alors $\left(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Ainsi $\begin{cases} IA = 2.IC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ alors f(C)=A

3) a) On a : f(C)=A et f(H)=B alors f((CH))=(AB) d'où (CH)⊥(AB) donc $\widehat{HFB} = \widehat{HIB} = \frac{\pi}{2}$

et par la suite I et F appartiennent au cercle de diamètre [HB]

Dans le cercle de diamètre [HB] les angles $\left(\widehat{IH,IF}\right)$ et $\left(\widehat{BH,BF}\right)$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc alors $\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BF}}\right)[2\pi]$

Or $\left(\widehat{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CH}}\right)[2\pi]$ en effet : les deux triangles CDH et HBF sont semblables car $\widehat{HFB} = \widehat{HDC} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BHF} = \widehat{CHD}$ (deux angles opposés par le sommet)

et comme CDH est un triangle rectangle et isocèle en D (DC=DH= $\frac{1}{2}$DB) alors $\left(\widehat{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BF}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. D'où $\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) $\widehat{DIH} = \widehat{EIH} = \frac{\pi}{4}$ car EIH est un triangle rectangle et isocèle en H (R(I)=E)

et $\widehat{HIF} = \frac{\pi}{4}$ alors $\widehat{DIF} = \widehat{DIH} + \widehat{HIF} = \frac{\pi}{2}$ d'où (ID)⊥(IF).

f((ID)) est la droite perpendiculaire à (ID) et passant par le point f(I)=I. Alors f((ID))=(IF)

c) On a f(C)=A et f(H)=B alors f((CH))=(AB)

et on a J∈(CH)∩(DI) alors f(J) ∈f((CH))∩f((DI)) cela signifie que f(J)∈(AB)∩(IF) et comme F∈(AB) alors f(J)=F

d) f((IF)) est la droite perpendiculaire à (IF) et passant par le point f(I)=I, alors f((IF))=(ID) F∈(CH)∩(IF) alors f(F) ∈f((CH))∩f((IF)) cela signifie que f(F)∈(AB)∩(ID). D'où f(F)= Ω

4) Montrons d'abord que F=A⋆ Ω. Ce ci revient à montrer que J=F⋆C ?

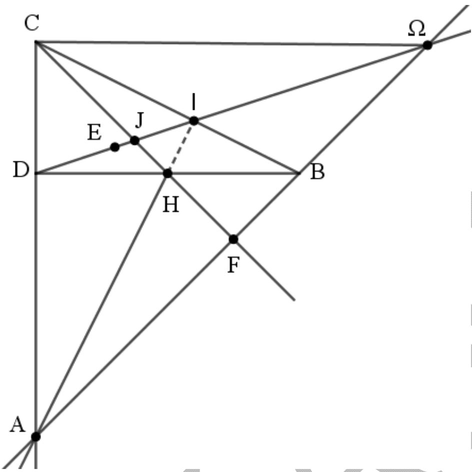
Le triangle DCH est rectangle et isocèle en D (c'est déjà justifié) alors $\widehat{ACF} = \frac{\pi}{4}$

et comme $\widehat{CFA} = \frac{\pi}{2}$ (c'est déjà montré) alors le triangle AFC est isocèle en F, d'où AF=FC

D'autre part AF=2.CJ (car f(C)=A et f(J)=F) alors FC=2.CJ et comme de plus J∈[CF] alors J=F⋆C.

La similitude f conserve le milieu alors f(J) =f(F)⋆f(C), d'où F=A⋆ Ω et par conséquent (FC) est un axe de symétrie dans le triangle A ΩC, ce qui implique que $\widehat{C\Omega F} = \widehat{CAF} = \frac{\pi}{4}$

D'où le triangle CA Ω est rectangle en C.



EXERCICE N2 :

1) a) Le triangle FDG est rectangle en D (car D∈ Γ et [FG] est le diamètre de Γ), de plus O est le projeté orthogonal de D sur [FG]. Alors $OD^2 = OF \times OG$ d'où $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$

b) $z_A = i.\sqrt{1+\sqrt{2}}.e^{i\theta} = i.\sqrt{OD^2}.e^{i\theta} = OD.e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\theta} = OD.e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

2) (E) : $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

a) $\left(i.\sqrt{1+\sqrt{2}}.e^{i\theta}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}\left(i.\sqrt{1+\sqrt{2}}.e^{i\theta}\right) + e^{2i\theta} = -(1+\sqrt{2})e^{2i\theta} + \sqrt{2}e^{2i\theta} + e^{2i\theta} = 0$

Alors z_A est une solution de l'équation (E).

b) On sait que $z_A.z_B = e^{2i\theta}$ alors cela signifie que $z_B = \frac{e^{2i\theta}}{z_A} = \frac{e^{2i\theta}}{i.\sqrt{1+\sqrt{2}}.e^{i\theta}} = -i\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Ainsi $z_B = \frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{OD}$

3) a) $\frac{z_A}{z_B} = \frac{OD.e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}{\frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{OD}} = OD^2.e^{i\pi} = -OD^2 \in IR$ alors les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires (et de sens contraires). D'où O, A et B sont alignés.

b) Voir la figure

c) $\frac{Aff(\overrightarrow{AC})}{Aff(\overrightarrow{AB})} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{ODe^{i\theta} - OD.e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}{\frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{OD} - OD.e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}} = \frac{OD - OD.e^{i\frac{\pi}{2}}}{\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{OD} - OD.e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{OD - i.OD}{\frac{-i}{OD} - i.OD} = \frac{i.OD + OD}{\frac{1}{OD} + OD} = \frac{OD^2}{1+OD^2}(1+i) =$
$\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(1+i) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

• On a : $\dfrac{Aff(\overrightarrow{AC})}{Aff(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ alors :

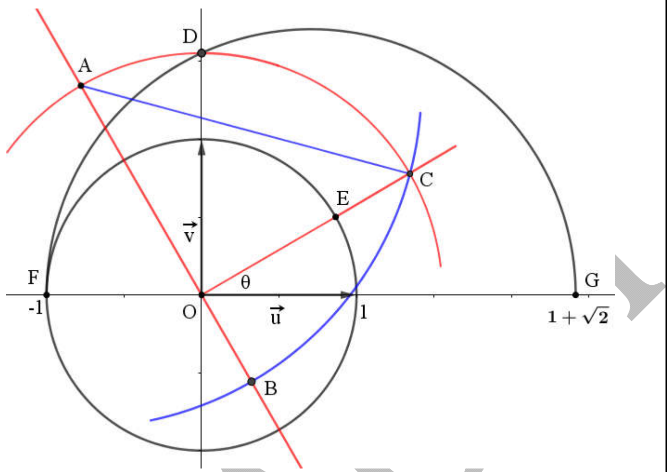
$\left|\dfrac{Aff(\overrightarrow{AC})}{Aff(\overrightarrow{AB})}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|1+i| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} = 1$ cela signifie que $\dfrac{AC}{AB} = 1$, d'où le triangle ABC est isocèle en A

et de plus $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \text{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)[2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(1+i)[2\pi]$

Ainsi $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

d) Voir la figure



EXERCICE N3 :

A)

1) a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x.lnx = 0$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ d'où f est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x.lnx}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} lnx = -\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en 0.

Donc la courbe (C_f) admet au point O(0,0) une demi-tangente à droite verticale dirigée vers le bas.

c) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $f'(x) = lnx + 1$ pour tout $x > 0$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

2) a) Voir la figure

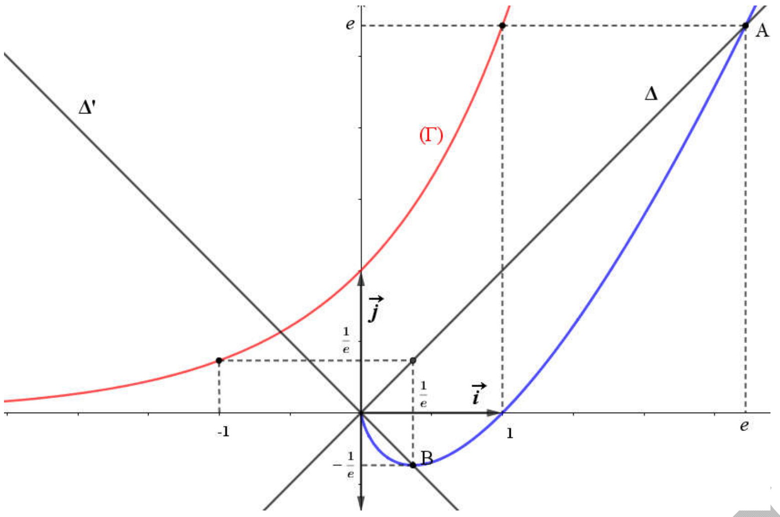
b) $f(x) - x = x(lnx - 1)$ $\forall x > 0$ et $f(0) - 0 = 0$ alors :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)-x$	0	−	0	+	
Cf/Δ	$Cf\cap\Delta=$ {O(0,0)}	au dessous de Δ	$Cf\cap\Delta=$ {A}	au dessus de ∞	

$f(x) + x = x(lnx + 1)$ $\forall x > 0$ et $f(0) + 0 = 0$ alors :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f(x)+x$	0	−	0	+	
Cf/Δ'	$Cf\cap\Delta'=$ {O(0,0)}	au dessous de Δ'	$Cf\cap\Delta'=$ {B}	au dessus de Δ'	

c) Courbe (C_f)



3) <u>L'aire $\mathcal{A}$ de la partie S :</u>

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ où $\mathcal{A}_1$ est l'aire du triangle OBB' avec B' est le point de Δ d'abscisse $\frac{1}{e}$

et $\mathcal{A}_2$ est l'aire de partie du plan limitée par (C_f), Δ et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$

$\mathcal{A}_1 = \frac{\frac{1}{e}\times\frac{2}{e}}{2} = \frac{1}{e^2}$

$$\mathcal{A}_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e}(x - f(x))dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e}(x - x\ln x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{e} - \left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{e} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4e^2}\right)$$

$$= \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$$

Alors $\mathcal{A} = \frac{1}{e^2} + \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right).(u.a)$

B) 1) a) La fonction $t \longmapsto t^n e^t$ est continue et strictement positive sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ alors

$u_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t dt > 0.$

b) Pour tout $\frac{1}{e} \leq t \leq 1$ on a : $0 < e^{\frac{1}{e}} \leq e^t \leq e$ alors $0 < t^n e^t \leq e.t^n$

En intégrant sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, on obtient : $0 < u_n \leq e.\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n\, dt$ cela signifie que :

$0 < u_n \leq e.\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)e^{n+1}}$ ce qui implique que $0 < u_n \leq \frac{e}{n+1}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) $u_{n+1} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t dt$

$= \left[t^{n+1}e^t\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - (n+1)\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t dt = e - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} - (n+1)u_n$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(e - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} - u_{n+1}\right) = e$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} = 0$

2) a) Pour tout réel t tel que : $\frac{1}{e} \leq t \leq 1$ on a : $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(t) \leq f(1)$ car f est croissante sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Alors $-\frac{1}{e} \leq f(t) \leq 0$. Et comme $t^n e^t > 0\ \forall\, t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ alors $-\frac{1}{e}t^n e^t \leq t^n e^t f(t) \leq 0$

En intégrant sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ on obtient : $-\frac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$

b) Pour tout $t > 0$, $tf'(t) - t = t(\ln t + 1) - t = t.\ln t = f(t)$

- $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t f(t)dt = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t (tf'(t) - t)dt$

$= \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t f'(t)dt - \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t dt = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t f'(t)dt - u_{n+1}$

c) $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f'(t)dt - u_{n+1} = [t^{n+1}e^t f(t)]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f(t) + (n+1)t^n e^t f(t)dt - u_{n+1}$

$$= \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f(t)dt - (n+1)\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t f(t)dt - u_{n+1}$$

Alors $v_n = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - (n+1)v_n - u_{n+1}$

D'où $(n+2)v_n = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1} = 0$ en effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 0$ (puisque $-\frac{u_n}{e} \le v_n \le 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{u_n}{e} = 0$)

3) a) f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e},1\right]$ alors f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e},1\right]$ sur $f\left(\left[\frac{1}{e},1\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(1)\right] = \left[-\frac{1}{e},0\right]$

D'autre part : $-\frac{u_n}{e} \le v_n \le 0$ signifie $-\frac{1}{e} \le \frac{v_n}{u_n} \le 0$ donc $\frac{v_n}{u_n} \in \left[-\frac{1}{e},0\right]$.

Alors l'équation $f(x) = \frac{v_n}{u_n}$ admet une unique solution α_n dans $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n = e$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+2)v_n}{(n+1)u_n} = 0$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+2)}{(n+1)} = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n} = 0$

c) On a : pour tout $n \in IN, f(\alpha_n) = \frac{v_n}{u_n}$ alors $\alpha_n = f^{-1}\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$

Or f^{-1} est continue sur $\left[-\frac{1}{e},0\right]$ car f est continue sur $\left[\frac{1}{e},1\right]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n} = 0$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{v_n}{u_n}\right) = f^{-1}(0) = 1$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 1$

EXERCICE N4 :

A) 1) (q est impair) équivaut à $q \equiv 1[2]$
équivaut à $q^2 \equiv 1^2[2]$
équivaut à $q^2 \equiv 1[2]$
équivaut à (q^2 est impair)

2) q est impair alors il existe $k \in IN$ tel que $q = 2k+1$ donc $(q^2-1) = 4k^2+4k = 4k(k+1)$
Or $k(k+1)$ est un entier pair car c'est le produit de deux entiers consécutifs tels que l'un est nécessairement pair, alors $4k(k+1) = 4\times 2t$ où $t \in IN$ donc $4k(k+1) \equiv 0[8]$.
D'où $q^2 \equiv 1[8]$.

B) 1) $2^{2\times2} + 3^{2\times1} = 25 = 5^2$ alors $(m,n,q) \in A$.

2) a) $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$
On a : $2^{2m} \equiv 0[2]$ et $3^{2n} \equiv 1[2]$ (puisque $3 \equiv 1[2]$) alors $q^2 \equiv 1[2]$ c'est-à-dire q^2 est impair et cela signifie que q est impair.

b) On remarque que : $3^{2n} = 9^n \equiv 1[8]$ (puisque $9 \equiv 1[8]$)
et on a de plus $q^2 \equiv 1[8]$ alors $q^2 - 3^{2n} \equiv 0[8]$

c) On a $q^2 - 3^{2n} \equiv 0[8]$ signifie que $2^{2m} \equiv 0[8]$ ce qui implique que $2m \ge 3$, alors $m \ge 2$. D'où $m \ne 1$

3) a) On a : $q \equiv 1[2]$ (car q est impair) et $3^n \equiv 1[2]$ (puisque $3 \equiv 1[2]$) alors $q + 3^n \equiv 0[2]$
et $q - 3^n \equiv 0[2]$ d'où $q+3^n$ et $q-3^n$ sont deux entiers pairs.

b) d$= (q-3^n)\wedge(q+3^n)$ alors d divise $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ donc d divise $(q-3^n)+(q+3^n)$ et d divise $(q-3^n)(q+3^n)$. D'où d divise $2q$ et d divise $q^2-3^{2n}=2^{2m}$

- On a : d divise 2^{2m} alors d$= 2^p$ où $p\in IN$, par conséquent d $\wedge q=1$. Ceci implique que d divise 2 (Lemme de Gauss). Or d ≥ 2 car $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ sont pairs alors d$= 2$.

c) On a : $(q-3^n)(q+3^n)=2^{2m}$ alors il existe $(\alpha,\beta)\in IN^2$ tel que $\alpha\geq 1$, $\beta\geq 1$, $(q-3^n)=2^\alpha$ et $(q+3^n)=2^\beta$. Ainsi $\alpha+\beta=2m$ et $\alpha\leq\beta$ (car $q-3^n\leq q+3^n$).

Supposons que $\alpha\neq 1$: alors $\beta\geq\alpha\geq 2$. Ce qui est absurde car $2^\alpha\wedge 2^\beta=2$

Ainsi $\alpha=1$ et par la suite $\beta=2m-1$

D'où $q-3^n=2$ et $q+3^n=2^{2m-1}$

- On a : $\begin{cases} q-3^n=2 & (1)\\ q+3^n=2^{2m-1} & (2)\end{cases}$ alors (1) + (2) donne $q=1+2^{2m-2}$

et (2) − (1) donne $3^n=2^{2m-2}-1$

4) Pour $m=2$: on obtient $q=5$ et $3^n=3$ alors $n=1$

5) a) $m\geq 3$ alors $2m-2\geq 4$ donc $2^{2m-2}\equiv 0[16]$ ce qui implique que $3^n\equiv -1[16]$

b) On remarque que $3^4\equiv 1[16]$ alors :

$k=\ldots$	4p	4p+1	4p+2	4p+3
$3^k\equiv\ldots[16]$	1	3	9	11

(où p$\in IN$)

c) Si $(m,n,q)\in A$ tel que $m\geq 3$ alors $3^n\equiv -1[16]$ cela signifie que $3^n\equiv 15[16]$ ce qui est absurde car $3^n\equiv r[16]$ où $r\in\{1,3,9,11\}$. Alors il n'existe pas un triplet $(m,n,q)\in A$ tel que $m\geq 3$.

6) On sait que $m\geq 2$ et que l'hypothèse $(m\geq 3)$ est absurde, alors $m=2$.

D'où $q=5$ et $n=1$. Ainsi si $(m,n,q)\in A$ alors $(m,n,q)=(2,1,5)$.

Réciproquement : si $(m,n,q)=(2,1,5)$ alors $2^{2m}+3^{2n}=16+9=25=5^2$. Alors $(m,n,q)\in A$

D'où $A=\{(2,1,5)\}$

CORRIGÉ DU SUJET DE MATHS
BAC 2018 SESSION DE CONTROLE

SECTION MATHS

PROPOSÉ PAR
M^{r} SALAH HANNACHI

EXERCICE N1 :

1) $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

$\equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ Ainsi f est un déplacement d'angle non nul $-\frac{2\pi}{3}$ d'où f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de centre O car il est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [AC] (O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC).

2) a) $g(A) = C$ et $g(B) = A$

1ère méthode :

Méd([AC])∩Méd([AB])= {O} alors Méd([AC])≠Méd([AB]) donc l'antidéplacement g est une symétrie glissante.

2^{éme} méthode :

$gog(B) = g(A) = C$ alors $gog \neq id_{\mathcal{P}}$ (où $id_{\mathcal{P}}$ est l'identité du plan orienté $\mathcal{P}$).

D'où l'antidéplacement g n'est pas une symétrie orthogonale ce qui implique que g est une symétrie glissante.

b) $gog(B) = g(A) = C$ alors $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$ est le vecteur de la symétrie glissante g.

$g(A) = C$ et $g(B) = A$ alors l'axe Δ de g passe par les milieux des segments [AC] et [AB] donc Δ et (BC) sont parallèles (droite joignant les milieux de deux cotés d'un triangle). Par conséquent Δ coupe le segment [AI] en son milieu perpendiculairement ((AI) est une médiatrice dans le triangle ABC). D'où Δ est la médiatrice de [AI].

Ainsi $g = t_{\overrightarrow{BI}} \text{ o } S_\Delta$

3) a) $\varphi = g \text{ o } h \text{ o } f$ est la composée d'un antidéplacement g (similitude indirecte de rapport 1) est d'une similitude directe $h \text{ o } f$ (composée d'une homothétie et d'un déplacement) de rapport $|k|$ où k est le rapport de h. Donc φ est une similitude indirecte de rapport $|k| = \frac{AI}{AO} = \frac{3}{2}$ car O est le centre de gravité du triangle équilatéral ABC.

b) $\varphi(B) = g \text{ o } h \text{ o } f(B) = g \text{ o } h\,(A) = g(A) = C$

$\varphi(O) = g \text{ o } h \text{ o } f(O) = g \text{ o } h\,(O) = g(I) = t_{\overrightarrow{BI}} \text{ o } S_\Delta(I) = t_{\overrightarrow{BI}}(A) = D$

4) a) On a : E= φ(C), C= φ(B) et D= φ(O) alors l'image par φ du triangle OBC est le triangle DCE. De plus OBC est isocèle en O alors DCE est isocèle en φ(O) =D.

b) On a : E= φ(C), C= φ(B) et D= φ(O) alors $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)[2\pi]$ (la similitude indirecte φ transforme une mesure d'un angle orienté en son opposé)

Alors $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ (car $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$)

c) Voir la figure

d) φ est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport $\frac{3}{2}$ alors la composée $\varphi \text{ o } \varphi$ est une homothétie de centre Ω et e rapport $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

D'autre part : $\varphi \circ \varphi(B) = \varphi(C) = E$ alors $\overrightarrow{\Omega E} = \frac{9}{4}\overrightarrow{\Omega B}$

$\overrightarrow{\Omega E} = \frac{9}{4}\overrightarrow{\Omega B}$ équivaut à $\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BE} = \frac{9}{4}\overrightarrow{\Omega B}$

équivaut à $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$

- Construction de Ω :
  - On peut construire le point Ω' tel que $\overrightarrow{B\Omega'} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$ (en utilisant le théorème de Thalès)
  - Ensuite construire le point Ω tel que $\Omega = S_B(\Omega')$

5) $\left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ME}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{ME}}\right)[2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) + \pi - \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}}\right)[2\pi]$

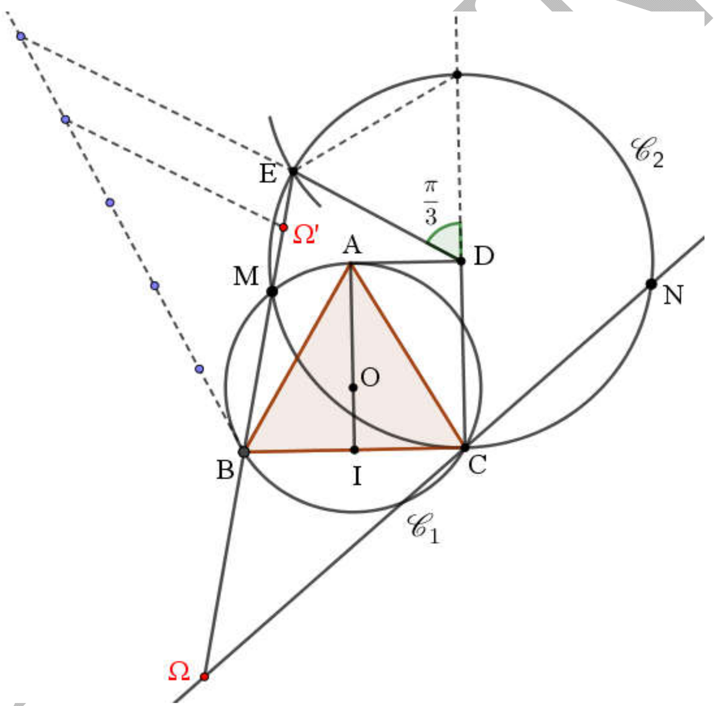
$\equiv \frac{\pi}{3} + \pi - \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv \pi[2\pi]$ alors M, B et E sont alignés et par la suite Ω, B et M sont alignés.

- Ω, B et M sont alignés alors $\varphi(\Omega) = \Omega$, $\varphi(B) = C$ et $\varphi(M) = N$ sont alignés.

  De plus $\varphi(M) \in \varphi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ ($\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre $\varphi(O)$ =D et passant par le point $\varphi(B)$ =C)

  alors N$\in (\Omega C) \cap \mathcal{C}_2$ tel que N$\neq$C (car M$\neq$B et φ est une bijection du plan dans lui-même).



EXERCICE N2 :

1) a) $p(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $p(F_1/E) = \frac{1}{2}$, $p(F_1/\overline{E}) = \frac{2}{3}$

b) $p(F_1) = p(F_1/E).p(E) + p(F_1/\overline{E}).p(\overline{E}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

2) Effectuer n lancers successifs, c'est effectuer n épreuves successives et indépendantes

alors $p(F_n/E) = (p(F_1/E))^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $p(F_1/\overline{E}) = \left(p(F_1/\overline{E})\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$p(F_n) = p(F_n/E).p(E) + p(F_n/\overline{E}).p(\overline{E}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

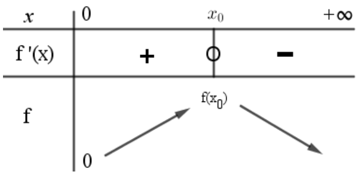
3) a) $X_n(\Omega) = \{0, n\}$

$$p(X_n = 0) = p(\overline{F_n}) = 1 - \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$p(X_n = n) = p(F_n) = \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

b) $E(X_n) = 0 \times p(X_n = 0) + n \times p(X_n = n) = \frac{n}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

c) Voici le tableau de variation de la fonction f :



f est maximale sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $x = x_0$.

$x_0 \in [1,2]$ alors $E(X_n)$ =f(n) est maximale si et seulement si n∈ {1,2}

On remarque dans le graphique que f(2)>f(1) alors

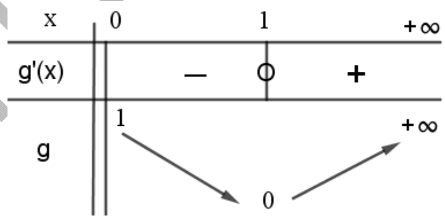
$E(X_n)$ est maximale si et seulement si n=2

EXERCICE N3 :

1) $g(x) = 1 - x + x\ln x \;\; ; \quad x > 0$

a) $g'(x) = \ln x$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{x} - 1 + \ln x\right) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$



b) Le réel $g(1) = 0$ est un minimum absolu de g alors pour tout $x > 0$, on a : $g(x) \geq 0$ ce qui implique que

$1 + x\ln x \geq x$ pour tout $x > 0$

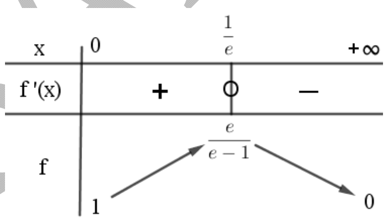
2) a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + x\ln x} = 1 = f(0)$, alors f est continue à droite en 0

b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x\ln x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ln x}{1 + x\ln x} = +\infty$. Alors (C_f) admet au point A(0,1) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + x\ln x} = 0$. Alors l'axe des abscisses est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3) a) On pose $u(x) = 1 + x\ln x$ alors $f'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{1 + \ln x}{(1 + x\ln x)^2}$, pour tout $x > 0$.

b) Tableau de variation de f :



4) a) • Le point A est l'intersection de (C_1) et la droite d'équation $y = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

• Le point B est le point de (C_2) dont le projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{\imath})$ est le point K défini par : K= $t_{\vec{\imath}}(H')$ où $H' = S_O(H)$ tel que H est le point de l'axe $(O, \vec{\imath})$ d'abscisse $\frac{1}{e}$

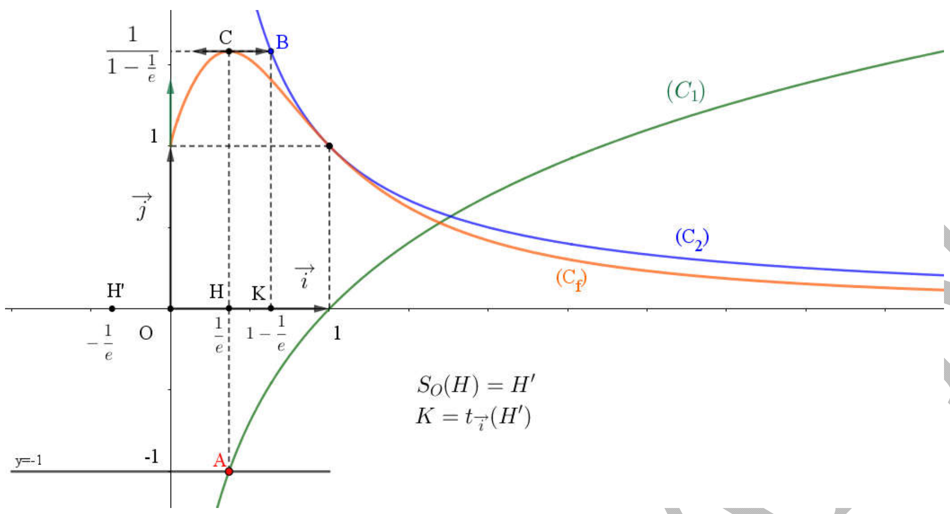
b) Pour tout $x > 0$, $1 + xlnx \geq x$ implique que $\frac{1}{1+xlnx} \leq \frac{1}{x}$

D'où $f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$

- Position de (C_f) par rapport à (C_2) :

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - \frac{1}{x}$		$-$	0	$-$	
$(C_f)/(C_2)$		$\frac{(C_2)}{(C_f)}$	$(C_f) \cap (C_2) = \{A(1,1)\}$	$\frac{(C_2)}{(C_f)}$	

c) La courbe (C_f) :



5) a) Pour tout $t \geq 1$, on a : $t.lnt \geq 0$ alors $t + t.lnt \geq 1 + t.lnt$

Cela signifie que $\frac{1}{t+t.lnt} \leq \frac{1}{1+t.lnt}$ D'où $\frac{1}{t+t.lnt} \leq f(t)$ pour tout $t \geq 1$.

b) Pour tout $t \geq 1$, on a : $\frac{1}{t+t.lnt} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ alors $\int_1^x \frac{1}{t+t.lnt}dt \leq \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{1}{t}dt$ $\forall x \geq 1$

signifie que $\int_1^x \frac{\frac{1}{t}}{1+lnt}dt \leq F(x) \leq lnx$

signifie que $[ln(1+lnt)]_1^x \leq F(x) \leq lnx$

signifie que $ln(1+lnx) \leq F(x) \leq lnx$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[ln(1+lnx)] = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

Pour tout $x \geq 1$, on a : $\frac{ln(1+lnx)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{lnx}{x}$ et on a de plus $ln(1+lnx) \geq 0$, $\forall x \geq 1$

(car $1 + lnx \geq 1$ pour tout $x \geq 1$)

alors $0 \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{lnx}{x}$ $\forall x \geq 1$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

6) a) La fonction F est dérivable sur $[1,+\infty[$ car f est continue sur $[1,+\infty[$ et on a $F'(x) = f(x)$

Alors la fonction $h : x \mapsto x - F(x)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a : $h'(x) = 1 - f(x)$

Et comme $f(x) \leq \frac{1}{x}$ $\forall x > 0$ alors $f(x) < 1$ $\forall x > 1$ donc h est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et puisque h est continue sur $[1,+\infty[$ alors h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Ainsi h réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $h([1,+\infty[) = \left[h(1), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[= [1,+\infty[$

En effet : $h(1) = 1 - F(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{F(x)}{x}\right) = +\infty$

b) Pour tout $n \in IN^*$, $n \in [1,+\infty[$ et comme de plus h est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, alors $\forall\, n \in IN^*$ l'équation $h(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in [1,+\infty[$.

c) $h(\alpha_n) = n$ équivaut à $\alpha_n = h^{-1}(n)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}(n)$

$h^{-1}([1,+\infty[) = [1,+\infty[$ et h^{-1} est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}(n) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

d) On a : $h(\alpha_n) = n$ cela signifie que $\alpha_n - F(\alpha_n) = n$

signifie que $1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{n}{\alpha_n}$

signifie que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1-\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$

• On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$ (c'est le principe de la limite d'une fonction composée). D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1$

EXERCICE N4 :

1) $(E) :\ z^2 - (1+i)z - i = 0$. On note ($a = 1,\ b = -(1+i)$ et $c = -i$)

$\Delta = b^2 - 4ac = (1+i)^2 + 4i = 6i = \left[\sqrt{3}(1+i)\right]^2$

Une racine carrée de Δ est $\delta = \sqrt{3}(1+i)$ alors les solutions de l'équation (E) sont :

$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i)}{2}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{(1-\sqrt{3})(1+i)}{2}$

2) Pour tout $z \neq i$, l'équation $z = \frac{z+i}{z-i}$ équivaut à $z^2 - iz = z + i$

équivaut à $z^2 - (1+i)z - i = 0$

équivaut à $z = z_1$ où $z = z_2$

Ainsi pour tout nombre complexe $z \notin \{1, i, z_1, z_2\}$, le point M$(z)$ et le point M'(z') sont distincts.

3) a) $z = i + 2e^{i\theta}$ équivaut à $z - i = 2e^{i\theta}$

équivaut à $\begin{cases} |z-i| = 2 \\ Arg(z-i) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} \mathrm{BM} = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Ainsi le point M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2 lorsque θ décrit IR.

b) $z' = \frac{z+i}{z-i} = \frac{2i+2e^{i\theta}}{2e^{i\theta}} = \frac{i+e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\left(i + e^{i\theta}\right) = 1 + ie^{-i\theta}$

c) $z' = 1 + ie^{-i\theta}$ équivaut à $z' - 1 = ie^{-i\theta}$

équivaut à $z' - 1 = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

équivaut à $\begin{cases} |z'-1| = 1 \\ Arg(z'-1) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi] \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} \mathrm{AM'} = 1 \\ \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AM'}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi] \end{cases}$

d) (θ décrit IR) signifie ($\frac{\pi}{2} - \theta$ décrit IR)

Alors l'ensemble des points M' est le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1 lorsque M décrit le cercle Γ.

4) a) $z_P = \frac{z_M+z_{M'}}{2} = \frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$

b) $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}+2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}+ie^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\theta}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}+e^{i\frac{3\pi}{4}}e^{-i\theta}}{2}$

$= \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}+e^{i(\frac{3\pi}{4}-\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{i(\frac{7\pi}{4}-\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2}$

c) $z_Q = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}+2e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}-3e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}}{2}+\frac{4\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)}{2}-\frac{3e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2}$

$= \frac{i\sqrt{2}}{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\frac{3}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-i\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\right]$

$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\right]$

5) a) On pose $z_Q = x_Q + iy_Q$ où $(x_Q, y_Q) \in IR^2$

On a : $z_Q = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\right]$ équivaut à $\begin{cases} x_Q = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \\ y_Q = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta) \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 2x_Q = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \\ \frac{2y_Q-\sqrt{2}}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \end{cases}$

Alors $(2x_Q)^2 + \left(\frac{2y_Q-\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$. Cela signifie que $4{x_Q}^2 + \frac{4}{9}\left(y_Q - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

Ainsi le point Q varie sur l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation : $4x^2 + \frac{4}{9}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ lorsque M varie sur le cercle Γ. (Remarque : Dans cette question il faut comprendre qu'on n'a pas demandé de montrer que cette équation est celle d'une ellipse)

b) Les étapes de construction du point Q :

- 1- Construire le point M' (pour cela on peut se servir des méthodes de construction des angles correspondants et des angles complémentaires).
- 2- Construire le point P milieu de [MM']
- 3- Construire sur l'ellipse $\mathcal{E}$ le point Q image du point P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.