Lycée 9 avril 1938 Sfax

Année Scolaire : 2016/2017

Devoir de synthèse 2

4 Science expérimental 1-2

Durée : 3heures

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du pourcentage des faux comptes facebook en tunisie de 2009 à 2017. La variable X désigne le rang de l'année et Y le pourcentage de faux comptes facebook

Tous les résultats seront arrondies à 10^{-2} prés.

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Rang de l'année X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage Y	85	78	73	66	57	51	47	44	43
$Z = \ln(Y)$.	4.44	4,35	4,29	4,18	4,04	3,93	3,85	3,78	3,76

1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X,Y) dans un repère orthogonal puis placer le point moyen du nuage .

2) a) Calculer le coefficient de corrélation. Un ajustement affine est-il justifié ?

b) Déterminer la droite de régression de Y en X.

b) Donner une estimation du pourcentage faux comptes facebook en 2020.

3) Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points .Pour cela, on pose : $Z = \ln(Y)$.

a) Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X.

En déduire l'expression de Y en X.

b) Donner une estimation du pourcentage de faux comptes facebook en 2020.

Exercice 2

Un propriétaire d'un complexe sportif louant des terrains de foot s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains.
Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine).
Dans le cadre de cette répartition, 70% des heures sont creuses.
Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20% des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90% des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les évènements :

- C : "l'heure est creuse " O: "le terrain est occupé "

1) Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2) Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
3) Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
4) Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale $\frac{27}{41}$
5) le vendredi 12 mai 2017 le propriétaire fait une inspection du complexe à 9h du matin. Soit Y la variable aléatoire indiquant le nombre de terrain occupé à l' instant de la visite .
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance.
   b) Déterminer la probabilité que la moitie des terrains soient occupés.
6) Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :
   …◦ 10 dinars pour une heure pleine,
   …◦ 6 dinars pour une heure creuse.

   On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en dinars obtenue grâce à la location d'un terrain de ce complexe, choisi au hasard.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Déterminer l'espérance de X.
   c) Le complexe comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine. Calculer la recette hebdomadaire moyenne de ce complexe.

A) Dans l'annexe ci-jointe , on a tracé relativement au repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) la droite $\Delta: y = x + 1$ la courbe (Γ) d'équation $y = e^x$ et la courbe (Γ') d'équation $y = \ln x$

1) Par lecture graphique

a) Montrer que Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$

b) En déduire que Pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\ln x \leq x - 1$

2) Montrer alors que Pour tout $x \in]0, +\infty[$ $e^x - \ln x \geq 2$

B) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .(unité 5cm)

1) a) Montrer que f est continue dérivable à droite de 0

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f x)$.

2) On donne le tableau de variation de la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par

$\boldsymbol{\varphi(x) = (1 - x)e^x - \ln x + 1}$

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$-\infty$

a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0, +\infty[$ et vérifier que $1.23 < \alpha < 1.24$

b) Déterminer le signe de $\varphi(x)$.

3) a) Montrer que pour tout $x > 0$ $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x - \ln x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer $\mathscr{C}_f$ (on prendra $f(\alpha) = 0.4$)

C) On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $U_n = \int_1^n f(x)\, dx$

1) Donner une interprétation géométrique de U_n.

2) Etudier le sens de variation de la suite(U_n).

3) Soit la fonction Ψ définie sur $[1, +\infty[$ par $\boldsymbol{\Psi(x) = e^x - x.\ln x - \ln x}$

a) Calculer $\Psi'(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$ et montrer que $\Psi'(x) \geq 0$ **(Utiliser A-2)**

b) En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$ $\Psi(x) \geq 0$.

c) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ $xe^{-x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{e^x}$.

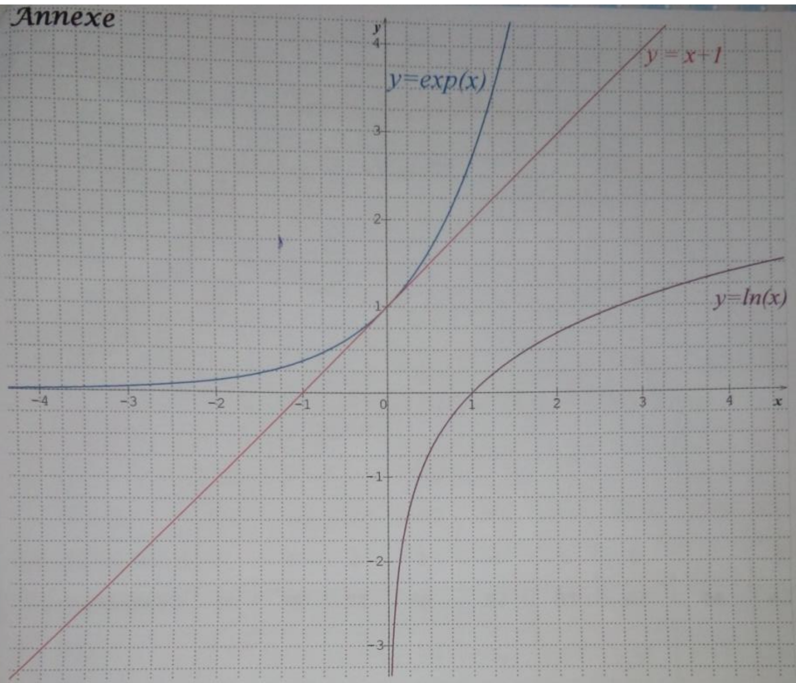
4) En effectuant une intégration par parties , calculer en fonction de n les deux intégrales $I_n = \int_1^n xe^{-x}\, dx$ et $J_n = \int_1^n (1 + x)e^{-x}\, dx$

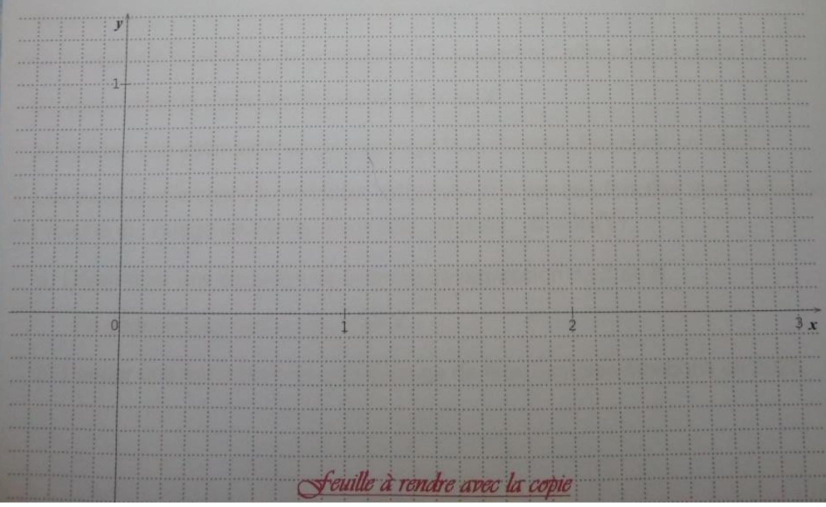
5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n \leq U_n \leq J_n$.

6) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \leq \frac{3}{e}$.

b) En déduire que la suite (U_n).converge vers un réel L, et que $\frac{2}{e} \leq L \leq \frac{3}{e}$.

Annexe





Feuille à rendre avec la copie