Aide-mémoire
Sciences physiques
Bac Math

L'essentiel

■ Un condensateur est un ensemble de deux plaques conductrices séparées par un isolant. Il se charge lorsqu'on établit entre ses bornes une tension continue et se décharge lorsqu'on le ferme sur un récepteur.

■ En désignant par q la charge portée par l'armature du condensateur vers laquelle est orienté le sens positif du courant, on a :

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$

■ La capacité C est une grandeur mesurable caractérisant la faculté d'un condensateur à stocker une charge q sous une tension u :

$$\boxed{q = C.u}$$

■ La capacité C d'un condensateur plan est proportionnelle à la surface S en regard des armatures et inversement proportionnelle à la distance e qui les sépare :

$$\boxed{C = e\frac{S}{e}}$$

où ε est la permittivité absolue du diélectrique.

■ Sous une tension u, un condensateur de capacité C emmagasine une énergie potentielle électrique :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} C u^2}$$

■ Toute décharge d'un condensateur s'explique par une restitution d'énergie emmagasinée.

■ Un dipôle RC soumis à un échelon de tension E répond par une évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur régie par la loi :

$$\boxed{u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

où τ = RC est la constante de temps du dipôle.

■ Quand un dipôle RC chargé est fermé sur lui même, la tension u_C aux bornes du condensateur, initialement égale à E, évolue selon la loi :

$$\boxed{u_C(t) = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

■ La constante de temps τ = RC renseigne sur la rapidité de la charge et de la décharge du condensateur.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

Pour étudier la charge d'un condensateur ou sa décharge dans un résistor, on réalise le montage de la figure 1.

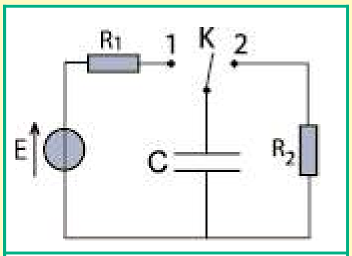


Fig.1

À l'aide d'un ordinateur, d'un capteur et d'une interface de saisie de données, on suit l'évolution temporelle de la tension u_C aux bornes du condensateur.

1°) En plaçant le commutateur dans la position 1, on obtient la courbe $u_C(t)$ de la figure 2.

a) Interpréter l'allure de la courbe $u_C(t)$ de la figure 2.

b) Déterminer graphiquement le temps mis par le condensateur pour se charger.

Pour cela on suppose que le condensateur est complètement chargé quand $u_C = E$ à 1% près.

2°) On bascule le commutateur dans la position 2, le condensateur se décharge complètement dans le résistor de résistance $R_2 = 1\ k\Omega$ au bout d'une durée t = 250 ms. La courbe de décharge $u_C(t)$ est représentée sur la figure 3.

a) Interpréter l'allure de la courbe $u_C(t)$ obtenue lors de la décharge du condensateur à travers le résistor de résistance R_2.

b) Déterminer graphiquement la constante de temps τ_2 et en déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

3°) Déterminer la valeur de la résistance R_1.

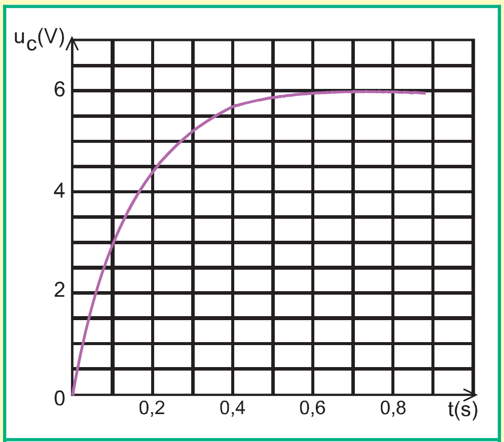


Fig.2

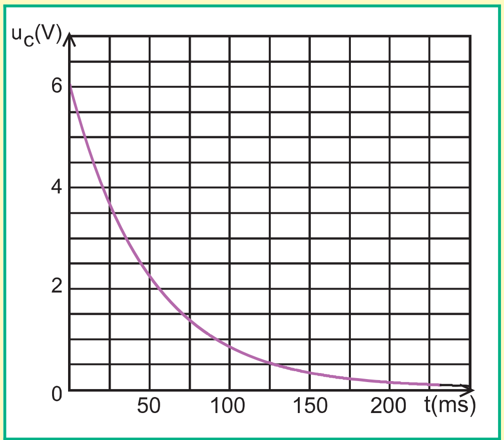
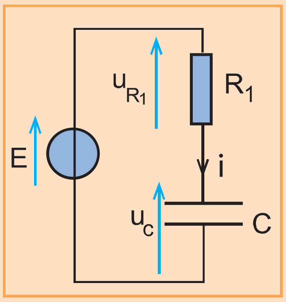


Fig.3

SOLUTION



1°) a) Quand le commutateur K est en position 1, c'est le circuit schématisé ci-contre qui est fermé.
Dans ce cas, la loi des mailles s'écrit : $u_C + u_{R_1} - E = 0$.

Avec $u_{R_1} = R_1 i$, $u_C = \frac{q}{C}$ et $i = \frac{dq}{dt}$. On a : $\tau_1 \frac{du_C}{dt} + u_C = E$, où $\tau_1 = R_1C$.
On sait qu'une telle équation différentielle admet comme solution :

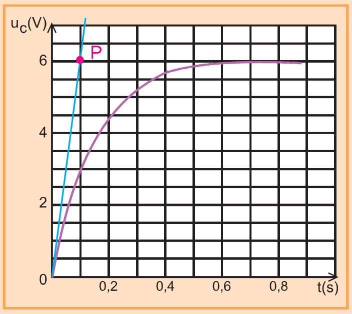
$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$. A l'instant t = 0, $e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 1$, donc $u_C = 0$. Quand t tend vers l'infini, u_C augmente exponentiellement vers E, ce qui explique l'allure de la courbe de charge

b) Soit θ la durée au bout de laquelle le condensateur est complètement chargé.

A $t = \theta$, $u_C \simeq E$ à 1% près, c'est-à-dire $u_C = 0,99$ E. Or $u_C(\theta) = E(1- e^{-\frac{\theta}{\tau_1}})$, on a donc :

$0,99 E = E(1 - e^{-\frac{\theta}{\tau_1}})$, ce qui donne $\frac{\theta}{\tau_1} = 2 \log 10$, d'où : $\theta = 4,6\,\tau_1 \simeq 5\,\tau_1$.

En conséquence, déterminer graphiquement θ revient à déterminer τ_1. On trace alors la tangente à la courbe de charge (Fig 2). au point d'abscisse t = 0, puis on projette son intersection P avec l'asymptote u = E sur l'axe des temps comme il est indiqué dans la figure ci-contre. On obtient alors, $\tau_1 = 0,1$ s. Donc $\theta = 0,5$ s.

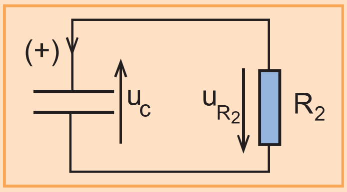


2°) a) Quand le commutateur K est en position 2, c'est le circuit schématisé ci-contre qui est fermé. Dans ce cas la loi des mailles s'écrit : $u_C + u_{R_2} = 0$.

Avec le même sens positif du courant, utilisé dans la question 1 - a,

on a : $\frac{q}{C} + R_2 i = 0$ avec $i = \frac{dq}{dt}$.

On alors : $\tau_2 \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$, où $\tau_1 = R_2C$.



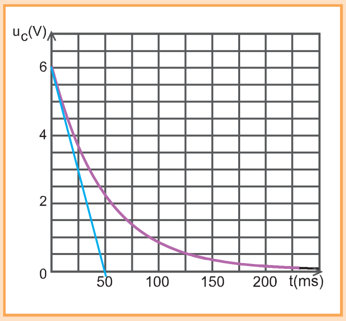
On sait qu'une telle équation différentielle admet comme solution :

$u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau_2}}$. A l'instant t = 0, $e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 1$, donc $u_C = E$.
Quand t tend vers l'infini, u_C diminue exponentiellement vers zéro, ce qui explique l'allure de la courbe de décharge.

b) Le traçage de la tangente à la courbe de décharge de la figure 3,

donne : $\tau_2 = 50$ ms. Or, $\tau_2 = R_2$ C, d'où $C = \frac{\tau_2}{R_2}$.

Soit, numériquement $C = 50\ \mu F$.



3°) On a $\tau_1 = R_1C$. d'où $R_1 = \frac{\tau_1}{C}$. Soit, numériquement $R_1 = 2\ k\Omega$.

L'essentiel

- Une bobine est un dipôle électrocinétique constitué généralement par un enroulement cylindrique dans le même sens, de fil conducteur recouvert d'une gaine isolante.
- Toute variation de champ magnétique à proximité d'une bobine en circuit fermé produit un courant électrique appelé courant induit.
- Loi de Lenz : Le courant induit a un sens tel qu'il s'oppose par ses effets à la cause qui lui donne naissance.
- Tout courant induit est dû à une f.e.m. délocalisée appelée f.e.m. d'induction.
- Toute bobine parcourue par un courant variable d'intensité i est le siège d'une f.e.m. d'auto-induction : $\boxed{e = -L\frac{di}{dt}}$, où L est l'inductance de la bobine.
- L'auto-induction traduit l'opposition d'une bobine à toute variation de courant.
- Pour une bobine d'inductance L, de résistance interne r, parcourue de sa borne A à sa borne B par un courant variable d'intensité i, la tension à ses bornes s'écrit:

$$\boxed{u_{AB} = L\frac{di}{dt} + ri}$$

- L'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine parcourue par un courant d'intensité i s'exprime : $\boxed{E_L = \frac{1}{2}Li^2}$
- L'inductance d'une bobine est une grandeur caractérisant sa faculté d'emmagasiner de l'énergie magnétique.
- Etant liée à l'intensité du courant, l'énergie magnétique stockée par une bobine est transférée à l'extérieur du circuit avec la rupture du courant.
- Un dipôle RL soumis à un échelon de tension de valeur E est parcouru par un courant continu qui ne s'établit pas brusquement, mais à la suite d'un régime transitoire, selon la loi : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$ où $\tau = \frac{L}{R}$ est la constante de temps du dipôle RL.
- Lors de la rupture du courant dans un circuit comportant une bobine, l'intensité i du courant ne s'annule pas brusquement, mais en diminuant de manière continue selon la loi :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

Un circuit série comporte un générateur maintenant entre ses bornes une tension constante E de 6 V, un interrupteur K, une bobine d'inductance L et de résistance interne r et un résistor de résistance R_o=140 Ω.

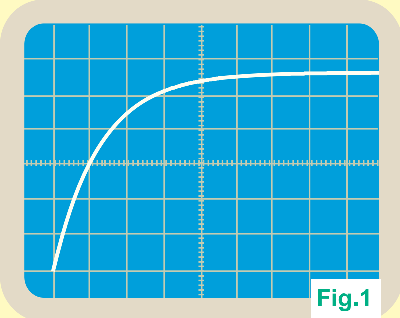


Fig.1

Afin d'étudier l'évolution de l'intensité du courant susceptible de circuler dans le circuit, on utilise un oscilloscope à mémoire.

En fermant l'interrupteur K, on obtient l'oscillogramme de la figure 1, les sensibilités horizontale et verticale étant réglées respectivement à 2ms/div et 1V/div.

1°) - Préciser parmi les schémas (1) et (2) de la figure 2, celui du montage qui a servi à l'enregistrement de l'oscillogramme de la figure 1.

- Y ajouter les connexions faites avec l'oscilloscope.

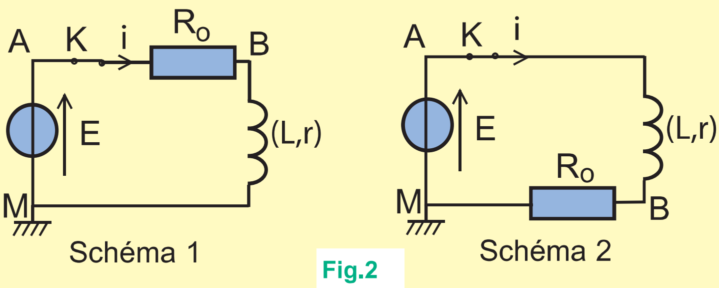


Fig.2

2°) Expliquer qualitativement l'allure de l'oscillogramme de la figure 1.

3°) a) Montrer que la tension u aux bornes du résistor est régie par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{R_o}{L}E, \text{ où } \tau = \frac{L}{R} \text{ avec } R = R_o + r$$

b) Sachant que cette équation admet comme solution : $u = Ae^{-\alpha t} + B$, déterminer les constantes A,B et α.

4°) Déterminer graphiquement les valeurs de τ, r et L.

5°) Déduire de l'expression de u, celle de l'intensité i du courant parcourant le dipôle RL.

SOLUTION

1°) Avec un oscilloscope, on ne peut visualiser directement que les tensions électriques. Pour visualiser l'évolution temporelle de l'intensité i d'un courant, il faut une tension proportionnelle à i. Donc, il faut brancher l'oscilloscope aux bornes du résistor de résistance R_o où $u = R_o.i$. Pour ce faire, le résistor doit avoir une borne reliée à la masse. Donc, le schéma du montage avec lequel est visualisée la tension u est le schéma 2 en reliant le point B à l'une des entrées de l'oscilloscope (Fig.3).

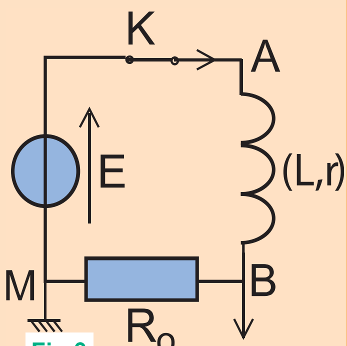


Fig.3

2°) La tension u est liée à l'intensité i du courant débité par le générateur dans le circuit par la relation $u = R_o i$. Or, i ne peut augmenter que progressivement à cause de la bobine qui s'oppose à sa variation, ce qui explique l'allure de la courbe représentant l'évolution de u au cours du temps.

3°a) Pour le circuit série réalisé, la loi des mailles s'écrit : $u_{AB} + u_{BM} + u_{MA} = 0$ ce qui signifie $u_{BM} + u_{AB} = u_{AM}$.

Avec le sens positif choisi pour le courant (Fig.3), on a :

$u + ri + L\frac{di}{dt} = E$ où $u = u_{BM}$.

Or, $u = R_o i$, ce qui signifie $i = \frac{u}{R_o}$. D'où $u + \frac{r}{R_o}u + \frac{L}{R_o}\frac{du}{dt} = E$.

$$u(1 + \frac{r}{R_o}) + \frac{L}{R_o}\frac{du}{dt} = E$$

$1 + \frac{r}{R_o} = \frac{R}{R_o}$ car $R = R_o + r$, d'où : $\frac{du}{dt} + \frac{R}{L}u = \frac{R_o}{L}E$.

Finalement, on a : $\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{R_o}{L}E}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$.

b) $u = Ae^{-\alpha t} + B$,

à t = 0, u = A + B = 0. Donc, B = - A.

D'où, $u = B(1 - e^{-\alpha t})$.

$\frac{du}{dt} = \alpha Be^{-\alpha t}$.

L'équation différentielle établie précédemment s'écrit donc :

$$\alpha Be^{-\alpha t} + \frac{B}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) = \frac{R_o}{L}E$$

$$B(\alpha - \frac{1}{\tau})e^{-\alpha t} + \frac{B}{\tau} = \frac{R_o}{L}E$$

Lorsque t tend vers l'infini, $e^{-\alpha t}$ tend vers zéro, ce qui donne :

$\frac{B}{\tau} = \frac{R_o}{L}E$, d'où $B = \frac{R_o}{R}E$ et l'équation différentielle devient :

$B(\alpha - \frac{1}{\tau})e^{-\alpha t} = 0$. Cette équation est valable quel que soit t.

Donc, $(\alpha - \frac{1}{\tau}) = 0$, ce qui signifie $\alpha = \frac{1}{\tau}$.

Finalement, on a : $\boxed{u = \frac{R_o}{R}E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

4°) On a $U_o = \frac{R_o}{R}E$, ce qui équivaut $\frac{R_o + r}{R_o} = \frac{E}{U_o}$, d'où $r = (\frac{E}{U_o} - 1)R_o$

Donc, pour déterminer graphiquement r, il suffit d'avoir la valeur de la tension U_o.
Celle-ci est l'ordonnée du point d'intersection de l'asymptote horizontale à la courbe avec l'axe des ordonnées. Le tracé donne U_o = 5,6 V.

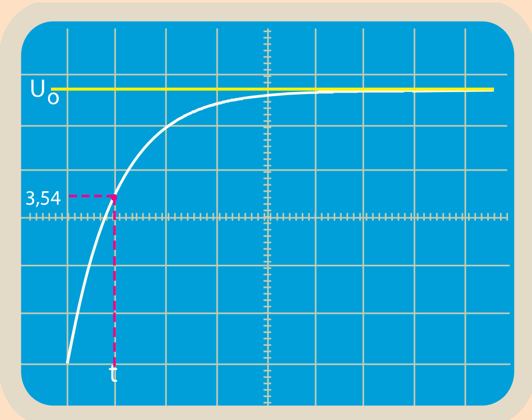
AN : r = 10 Ω

$u(\tau) = U_o(1 - \frac{1}{e}) = 0,632\ U_o = 3,45$ V.

En portant u=3.54V sur l'axe des tensions,
la projection sur l'axe des temps donne : τ = 2 ms

$\tau = \frac{L}{R}$ ce qui signifie $L = \tau R$.

AN : L = 300 mH



5°) $u = R_o i$ ce qui signifie $i = \frac{u}{R_o}$.

Or, $u = \frac{R_o}{R}E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

D'où, $\boxed{i = I_o(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$ avec $I_o = \frac{E}{R} = 0,04$ A.

L'essentiel

■ L'évolution de la charge du condensateur d'un circuit RLC série est régie en régime libre par l'équation différentielle : $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0}$

■ Un circuit RLC série auquel on a transféré initialement de l'énergie peut être le siège d'oscillations électriques libres amorties, c'est le régime pseudo-périodique.

■ Les oscillations libres d'un circuit RLC série sont d'autant plus amorties et leur pseudopériode est d'autant plus grande que la résistance R du circuit est plus grande. Pour des valeurs suffisamment élevées de la résistance R, c'est le régime apériodique.

■ Si la résistance d'un circuit RLC série est nulle, les oscillations libres ne sont plus amorties, elles sont sinusoïdales, c'est le régime périodique.

■ La période propre d'un oscillateur RLC série s'exprime : $\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{LC}}$

■ La pseudo-période des oscillations libres amorties d'un circuit RLC série est légèrement supérieure à T_o.

■ Les oscillations libres d'un circuit RLC série sont dues aux transformations mutuelles de ses énergies électrostatique et magnétique.

■ En régime libre, l'énergie totale d'un circuit RLC série ne se conserve que si sa résistance électrique est nulle.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

Dans une séance de travaux pratiques, on dispose du matériel suivant :

- un générateur de tension idéal de f.e.m. E = 5 V,
- un condensateur de capacité C = 1 μF,
- une bobine d'inductance L = 10 mH et de résistance interne r,
- un résistor de résistance R = 90 Ω,
- un oscilloscope à mémoire,
- un interrupteur et des fils de connexion.

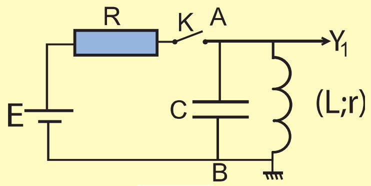


Fig.1

A l'aide de ce matériel, on réalise le montage de la figure 1.

1°) La résistance r de la bobine est supposée nulle.

a) L'interrupteur K étant fermé :

- montrer que la tension aux bornes de la bobine est nulle, en déduire la valeur de la charge du condensateur,
- calculer l'intensité I_o du courant parcourant la bobine.

b) En ouvrant l'interrupteur K à l'instant t = 0 :

- décrire qualitativement ce qui se passe dans le circuit,
- établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension u aux bornes du condensateur,
- sachant que cette équation différentielle admet comme solution $u = U_m \sin(\omega_o t + \varphi)$ avec $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ que l'on calculera, déterminer les valeurs de U_m et φ ; écrire les expressions de la charge q(t) du condensateur et de l'intensité i(t) du courant circulant dans la bobine.

c) D'où provient l'énergie de l'oscillateur réalisé ? La calculer.

2°) Avec les réglages adéquats sur l'oscilloscope et en mettant son dispositif de balayage en marche juste avant l'ouverture de l'interrupteur K, on obtient l'oscillogramme de la figure 2. S'y appuyer pour :

a) montrer par deux méthodes différentes que la résistance interne r de la bobine n'est pas nulle ;

b) calculer r ;

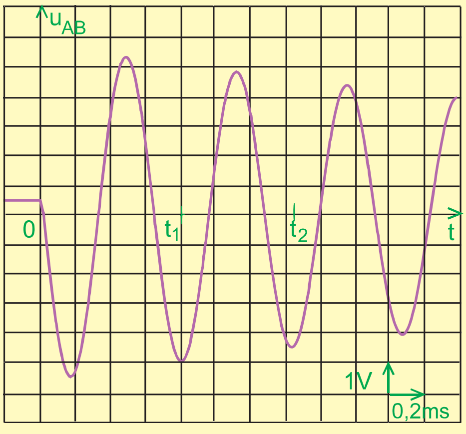


Fig.2

c) calculer la pseudo-période T des oscillations de la charge q du condensateur et la comparer à la période propre T_o ;
d) évaluer algébriquement la variation qui a affecté l'énergie totale de l'oscillateur entre les instants t_1 et t_2 indiqués sur la figure 2.

SOLUTION

1°a) - La tension instantanée $u_1 = u_{AB}$ aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance r parcourue par un courant d'intensité i (Fig.1) est :

$u_1 = r\,i + L\frac{di}{dt}$. (1)

Lorsque le régime permanent est établi dans le circuit, i(t) devient indépendante du temps, d'où $\frac{di}{dt} = 0$.

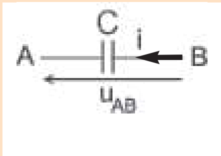


Fig.1

Donc, l'équation (1) devient : $u_1 = r.i$.

Or, la résistance r est supposée nulle. Donc, $u_1 = 0$ V.

- En choisissant comme sens positif du courant le sens orienté de B vers A à travers le condensateur (Fig.1) et comme charge q du condensateur celle portée par son armature qui est du côté de B, on a $u_{AB} = -\frac{q}{C}$. Or, $u_{AB} = u_1 = 0$.

Donc la charge q est nulle.

- On sait qu'en régime permanent, le condensateur joue le rôle d'un interrupteur ouvert. Donc, tout le courant d'intensité I_o débité par le générateur circule dans la bobine.

D'après la loi de Pouillet, $\boxed{I_o = \frac{E}{R}}$.

A.N : $I_o = 55{,}5$ mA.

b) - Lorsque l'on ouvre l'interrupteur K , à cause du phénomène d'auto-induction, la bobine s'oppose à l'annulation du courant. Celui-ci continue à circuler, d'après la loi de Lenz, dans le même sens. Ainsi, le condensateur va se charger et à son tour, il se déchargera dans la bobine dès que le courant s'annule et ainsi de suite :
le circuit RLC série est le siège d'oscillations libres non amorties.

- La loi des mailles s'écrit : $u_C + u_L = 0$ (Fig.2).

En posant $u_C = u$, on a : $u - L\frac{di}{dt} = 0$

Or, $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = -C.u$. Donc, $i = -C\frac{du}{dt}$. D'où : $u + LC\frac{d^2u}{dt^2} = 0$,

ce qui signifie : $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0}$

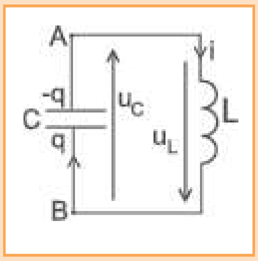


Fig.2

- On a : $u(t) = U_m \sin(\omega_o t + \varphi)$

$$\boxed{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}}.$$

A t = 0, $u = U_m \sin\varphi = 0$, d'où $\sin\varphi = 0$. Donc, $\varphi = 0$ ou bien $\varphi = \pi$ rad.

On a : $i = -C\frac{du}{dt}$. Donc, $i = -CU_m\omega_o\cos(\omega_o t + \varphi)$. A t = 0, on a : $i = -CU_m\omega_o\cos\varphi = I_o > 0$.

Donc, $\cos\varphi < 0$. D'où, $\underline{\varphi = \pi \text{ rad}}$.

$\cos\varphi = -\dfrac{I_o}{U_m C\omega_o} = -1$, ce qui signifie : $U_m = \dfrac{I_o}{C\omega_o}$.

A.N : $\underline{U_m \simeq 5{,}55 \text{ V}}$.

Finalement, on a : $\boxed{u(t) = 5{,}55\sin(10^4 t + \pi)}$

$q = -C.u$, d'où $\boxed{q = 5{,}55.10^{-6}\sin(10^4 t)}$

$i = -CU_m\omega_o\cos(\omega_o t + \varphi) = CU_m\omega_o\sin(\omega_o t + \varphi - \frac{\pi}{2})$. Or, $CU_m\omega_o = I_o$. Donc, $I_m = I_o = 55{,}5$ mA.

D'où : $\boxed{i = 55{,}5\sin(10^4 t + \frac{\pi}{2})}$ en mA, avec t en seconde.

c) $E = E_L + E_C$

La résistance du circuit RLC série étant supposée nulle, l'énergie totale se conserve : elle reste égale à l'énergie transférée initialement à l'oscillateur, c'est l'énergie magnétique $E_L = \frac{1}{2}L.I_o^2$ emmagasinée par la bobine durant tout le régime permanent de la question 1°a).

$$\boxed{E = \frac{1}{2}L.I_o^2}$$

A.N : $\underline{E = 1{,}54.10^{-5} \text{ J}}$

2°a)

Première méthode : Pour tout instant t > 0, la diminution de l'amplitude des oscillations libres durant le régime transitoire est due à la résistance du circuit qui est la résistance r de la bobine. Donc, r est non nulle.

Deuxième méthode : Durant le régime permanent, obtenu pour t<0, la tension aux bornes du condensateur est : u = 0,5 V. Or, la tension u_{AB} aux bornes de la bobine est égale à u d'où $u_{AB} = 0{,}5 \text{ V} \neq 0$. Donc, $r = \dfrac{u_{AB}}{I'_o}$ est non nulle.

b) On a : $r = \dfrac{u}{I'_o}$. Or, $I'_o = \dfrac{E}{r+R}$, d'où $r = \dfrac{u}{E}(R+r)$. Donc, $\boxed{r = \dfrac{u.R}{E-u}}$.

A.N : $\underline{r = 10\ \Omega}$.

c) D'après l'oscillogramme, $T = t_2 - t_1$ qui correspond à peu près à 3.25 div sur l'axe des temps.
Or, une division représente 0,2 ms. Donc, $T = 0,65\ ms$.

$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 0,628\ ms$, d'où T est légèrement supérieure à T_o.

d) Aux instants t_1 et t_2, u est maximale en valeur absolue. Donc, l'énergie du circuit RLC série est purement électrostatique.

A l'instant t_1, on a : $E_1 = \frac{1}{2}CU_{m1}^2$ et à l'instant t_2, on a : $E_2 = \frac{1}{2}CU_{m2}^2$.

D'après l'oscillogramme, on a : $U_{m1} = 5\ V$ et $U_{m2} = 4,5\ V$.

Donc, $\boxed{E_2 - E_1 = \frac{1}{2}C\,(U_{m2}^2 - U_{m1}^2)}$.

A.N : $E_2 - E_1 = -2,375.10^{-6}\ J$.

L'essentiel

■ Comme en régime libre non amorti, les oscillations forcées d'un circuit RLC série sont sinusoïdales mais de fréquence imposée par l'excitateur.

■ La réponse d'un circuit RLC série à une tension excitatrice sinusoïdale de fréquence N est un courant électrique d'intensité sinusoïdale de valeur maximale I_m et de phase initiale φ dépendant de la fréquence des excitations et des grandeurs électriques R, L et C caractéristiques de l'oscillateur :

$$\boxed{I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}} \qquad \boxed{tg\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}}$$

■ En régime forcé sinusoïdal, selon que le circuit RLC série, est capacitif ($\frac{1}{C\omega} > L\omega$) ou bien inductif ($L\omega > \frac{1}{C\omega}$) , l'intensité i du courant électrique y oscille en avance de phase ou bien en retard de phase par rapport à la tension excitatrice u.

■ En régime forcé sinusoïdal, la valeur maximale de l'intensité du courant est d'autant plus élevée que l'amortissement est plus faible.

■ La résonance d'intensité est obtenue pour une fréquence d'excitations égale à la fréquence propre de l'oscillateur. Dans ces conditions, i oscille en phase avec u.

■ La résonance d'intensité d'un circuit RLC série peut être accompagnée d'une surtension aux bornes du condensateur, caractérisée par un quotient Q > 1 appelé dans ces conditions facteur de surtension :

$$\boxed{Q = \frac{U_C}{U}}$$

■ En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne P d'un circuit RLC série est la valeur moyenne prise par sa puissance instantanée p(t) durant une période :

$$\boxed{P = UI\cos\varphi = RI^2}$$

■ Comme la résonance d'intensité, la résonance de puissance est obtenue pour une fréquence d'excitations égale à la fréquence propre de l'oscillateur.

■ Les pertes par effet Joule sont d'autant plus faibles que le facteur de puissance est plus grand.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ On associe en série un condensateur de capacité C, une bobine B d'inductance L et un résistor de résistance R_o = 81,5 Ω. L'ensemble est alimenté par un générateur de basses fréquences (GBF) délivrant à ses bornes une tension alternative sinusoïdale u(t) de valeur maximale U_m = 6 V et de fréquence N réglable (Fig.1).

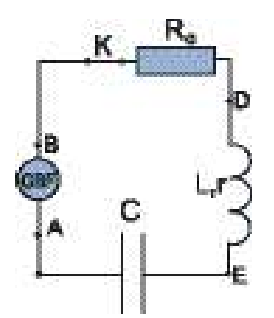


Fig.1

1°) a) Préciser parmi les points A et B du circuit celui auquel on doit relier la masse du GBF afin de visualiser simultanément la tension d'alimentation u(t) et la tension u_{Ro} aux bornes du résistor, sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe.

b) Reproduire le schéma de la figure 1 en y indiquant les branchement effectués à l'oscilloscope.

2°) Pour une valeur N_1 de la fréquence N du GBF, on obtient les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 2 avec les réglages suivants :

- base de temps : 0,5 ms/div ;
- voie utilisée pour visualiser u(t) : 2 V/div ;
- voie utilisée pour visualiser u_{Ro}(t) : 1 V/div.

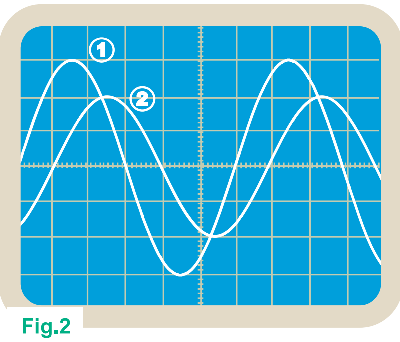


Fig.2

a) Identifier parmi les oscillogrammes (1) et (2) celui représentant u(t).

b) Déterminer graphiquement la fréquence N_1 et la valeur maximale I_m de l'intensité i(t) du courant électrique oscillant dans le circuit RLC série.

c) Calculer l'impédance Z du circuit RLC série.

d) - Déterminer graphiquement le déphasage entre i(t) et u(t).

- En déduire que la bobine a une résistance interne non nulle que l'on calculera.

3) Pour étudier le comportement de l'oscillateur à une autre fréquence N_2 du GBF, on visualise simultanément avec u(t), la tension u_C(t) aux bornes du condensateur.

a) Préciser le point du circuit auquel on doit relier la masse du GBF à cette fin.

b) Reproduire de nouveau le schéma de la figure 1 tout en y indiquant les nouveaux branchechements effectués à l'oscilloscope.

c) En fermant le circuit, on obtient les oscillogrammes de la figure 3 avec une sensibilité horizontale de 1 ms/div et une même sensibilité de 2 V/div pour le deux voies Y_1 et Y_2. Identifier l'oscillogramme représentant u_C(t).

14

d) Déterminer graphiquement la fréquence de $u_C(t)$ ainsi que son déphasage par rapport à $u(t)$.
e) Montrer que l'oscillateur RLC série est en résonance d'intensité.
f) Calculer le facteur de surtension et préciser si sa valeur présente un danger tout en justifiant la réponse.
g) Calculer C et L.

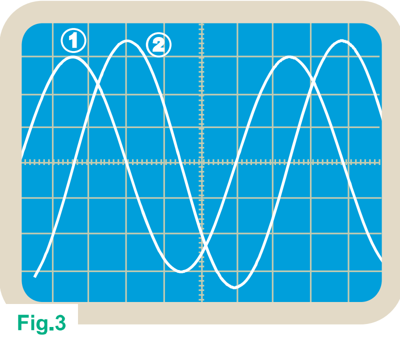


Fig.3

SOLUTION

1°a) Afin de visualiser simultanément $u(t)$ et $u_{Ro}(t)$, il faut que la masse du GBF soit du côté du résistor de résistance R_o. Il faut alors la relier au point B.
b) Comme sur le schéma de la figure 4, le point A est à relier à l'entrée Y_1 (ou Y_2) afin de visualiser $u(t)$ tandis que le point D est à relier à l'entrée Y_2 (ou Y_1) pour visualiser $u_{Ro}(t)$.

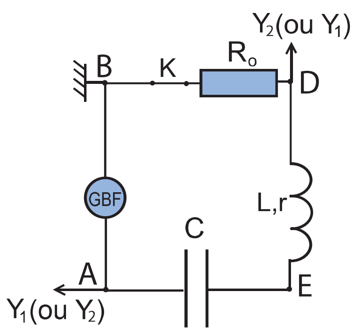


Fig.4

2°a) Um = 6 V et la voie utilisée pour visualiser $u(t)$ est de 2 V/div. Donc, l'oscillogramme (1) dont les crêtes sont distantes de 6 div est celui qui représente $u(t)$.
b) $u_{Ro}(t) = R_o.i(t)$: étant proportionnelles l'une à l'autre, $i(t)$ et $u_{Ro}(t)$ évoluent au cours du temps avec la même fréquence.
Du fait que le décalage horaire entre les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 2 est constant, on affirme que $u_{Ro}(t)$ évolue avec la même fréquence N_1 de $u(t)$.

$N_1 = \frac{1}{T_1}$. Or, T_1 s'étale sur 6 divisions et la sensibilité horizontale utilisée est de 0,5 ms/div.

Donc, T_1 = 3 ms, ce qui signifie : $N_1 \approx 333$ Hz.

On a : $u_{Ro}(t) = R_o.i(t)$, ce qui signifie : $i(t) = \frac{u_{Ro}(t)}{R_o}$. D'autre part, en s'appuyant sur la forme sinusoïdale de l'oscillogramme (2) de la figure 2, on écrit : $u_{Ro}(t) = U_{Rom}\sin(2\pi N_1 t + \varphi)$, où φ est sa phase initiale. Donc, $i(t) = I_m\sin(2\pi N_1 t + \varphi)$, avec $I_m = \frac{U_{Rom}}{R_o}$.

2 div $\rightarrow U_{Rom}$ et 1 div $\rightarrow$ 1 V. Donc, U_{Rom} = 2 V. D'où, avec Ro = 81,5 Ω : I_m = 24,5 mA.

c) L'impédance Z du circuit RLC série s'écrit : $Z = \frac{U_m}{I_m}$.

A.N. : Avec U_m = 6 V et I_m = 24,5 mA, Z = 244,9 Ω ≈ 245 Ω.
d) Soit $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u$, le déphasage entre $i(t)$ et $u(t)$ de phases initiales φ_i et φ_u. φ_i étant égale à la phasei nitiale φ de $u_{Ro}(t)$, déterminer $\Delta\varphi$ revient à déterminer graphiquement le décalage horaire Δt entre les oscillogrammes (2) et (1) de la figure 2 représentant respectivement $u_{Ro}(t)$ et $u(t)$.

$|\Delta\varphi| \rightarrow \Delta t = \frac{T}{6}$ et π rad $\rightarrow \frac{T}{2}$. Donc, $|\Delta\varphi| = \frac{\pi}{3}$ rad.

Les maximums de $u_{Ro}(t)$ sont atteints à Δt après ceux de u(t). Donc, $u_{Ro}(t)$ est en retard de phase par rapport à u(t), ce qui signifie $\Delta\varphi < 0$. Par suite, on a : $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{3}$ rad.

On sait que $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$. Ceci équivaut à $R = Z.\cos\varphi$. Avec $Z = 245\ \Omega$ et $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ car $\varphi = \frac{-\pi}{3}$ rad, on a : $R = 122{,}5\ \Omega$. Or, $R_o = 81{,}5\ \Omega$. Donc, $R > R_o$. Il en découle que la bobine a une résistance non nulle $r = R - R_o$. A. N. : $r = 41\ \Omega$.

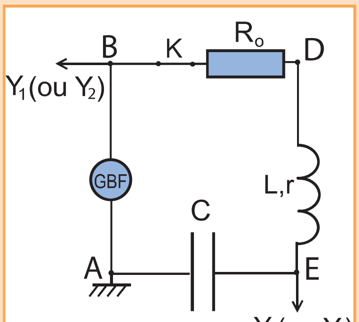


Fig.5

3°a) Pour visualiser simultanément la tension d'alimentation u(t) et la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, la masse du GBF doit être reliée au point A comme dans la figure 5.

b) Comme sur le schéma de la figure 5, le point B est à relier à l'entrée Y_1 (ou Y_2) afin de visualiser u(t) tandis que le point E est à relier à l'entrée Y_2 (ou Y_1) pour visualiser $u_C(t)$.

c) L'oscillogramme (1) étant le seul d'amplitude égale à 6 V, il représente u(t). Donc, c'est l'oscillogramme (2) qui représente $u_C(t)$.

d) Du fait que le décalage horaire entre les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 3 est constant, on affirme que $u_C(t)$ évolue avec la même fréquence N_2 de u(t).

En procédant comme on a fait pour répondre à la question 2.b, on obtient : $N_2 = 167$ Hz.

Les maximums de la tensions u(t) sont atteints à $\frac{T}{4}$ avant ceux de $u_C(t)$,ce qui signifie que $u_C(t)$ est en quadrature retard de phase par rapport à u(t) : $\varphi_{u_C} - \varphi_u = -\frac{\pi}{2}$ rad.

e) On a : $i = \frac{dq}{dt}$, d'où : $\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$. D'autre part, $u_C = \frac{q}{C}$. Il s'en suit : $\varphi_{u_C} = \varphi_q$.

Donc, $\varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$. Or, $\varphi_{u_C} - \varphi_u = -\frac{\pi}{2}$ rad, Donc, $\varphi_u - (\varphi_i - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ rad, d'où : $\varphi_u - \varphi_i = 0$.

Il s'agit alors d'une résonance d'intensité.

f) $Q = \frac{U_{Cm}}{U_m}$. En procédant comme on a fait pour déterminer graphiquement la valeur de U_{Rom} dans la réponse à la question 2.c, on trouve : $U_{Cm} = 7$ V. On a ainsi : $Q \approx 1{,}17$.

Q étant très peu supérieur à l'unité du fait que U_{Cm} est très légèrement supérieure à U_m, on ne court aucun danger.

g) On est à la résonance d'intensité. Donc, $Q = \frac{1}{RC\omega_2}$, d'où : $C = \frac{1}{RQ\omega_2}$.

A. N. : Sachant que $\omega_2 = 2\pi N_2$ et avec $N_2 = 167$ Hz, on trouve : $C = 6{,}68\ \propto F$.

D'autre part, la fréquence d'excitation est égale à la fréquence propre de l'oscillateur :

$N_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, d'où $L = \frac{1}{4\pi^2 N_2^2 C}$. A.N : $L = 137$ mH

ANALOGIE ENTRE UN OSCILLATEUR MECANIQUE ET UN OSCILLATEUR ELECTRIQUE

L'étude des oscillations libres d'un pendule élastique et celle d'un circuit RLC série révèle une analogie formelle entre l'oscillateur mécanique et l'oscillateur électrique. Cette analogie est récapitulée dans le tableau suivant :

Oscillateur		le pendule élastique	le circuit R L C série
Grandeurs caractéristiques	Coefficient d'inertie	masse m	indulance L
	Coefficient de rappel	raideur k	inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
	Facteur dissipatif	coefficient de frottement h	résistance R
Grandeurs oscillantes		élongation x	charge q
		vitesse $v = \frac{dx}{dt}$	intensité $i = \frac{dq}{dt}$
Equation différentielle des oscillations	amorties	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$
	non amorties	$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$ avec $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_o^2 q = 0$ avec $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$
Période propre de l'oscillateur		$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T_o = 2\pi\sqrt{LC}$
Equation horaire des oscillations non amorties		$x = X_m \sin(\omega_o t + \varphi_x)$ ou $v = V_m \sin(\omega_o t + \varphi_v)$	$q = Q_m \sin(\omega_o t + \varphi_q)$ ou $i = I_m \sin(\omega_o t + \varphi_i)$
Energie de l'oscillateur	Formes et expressions générales	- potentielle élastique : $\frac{1}{2}kx^2$ - cinétique : $\frac{1}{2}mv^2$ - mécanique : $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$	- électrostatique : $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ - magnétique : $\frac{1}{2}Li^2$ - totale : $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$
	non amorti	se conserve	
		$E = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}mV_m^2 = cte$	$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2}LI_m^2 = cte$
	amorti	diminue	
		$\frac{dE}{dt} = -hv^2 < 0$	$\frac{dE}{dt} = -Ri^2 < 0$

L'essentiel

- En l'absence de tout frottement, les oscillations libres d'un pendule élastique sont non amorties. Autrement, elles sont d'autant plus amorties que les frottements sont plus importants.
- Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$, où x est l'élongation du centre d'inertie du solide S et $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$.
- Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont périodiques de période propre : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$.
- En l'absence de tout frottement, le pendule élastique oscillant est un système conservatif.
- Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique résultent des transformations mutuelles d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.
- Les oscillations libres amorties d'un pendule élastique soumis à des frottements visqueux sont régies par l'équation différentielle : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$ où h est le coefficient de frottement. Selon l'importance de l'amortissement, le régime peut être :

- pseudopériodique (amortissement faible),
- apériodique (amortissement important).

- Les oscillations libres amorties d'un pendule élastique sont pseudopériodiques ; leur pseudopériode T est légèrement supérieure à la période propre de l'oscillateur :

l'écart $(T - T_0)$ est d'autant plus remarquable que l'amortissement est plus important.

- La diminution d'énergie due aux frottements rend les oscillations libres du pendule élastique amorties.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur $k = 10\ N.m^{-1}$ est enfilé sur une tige horizontale.

Une des extrémités du ressort est reliée à un cylindre creux (C) de masse m = 100 g qui peut coulisser sans frottement le long de la tige.

L'abscisse x du centre d'inertie G du cylindre (C) est repérée par rapport à O, position de G à l'équilibre.

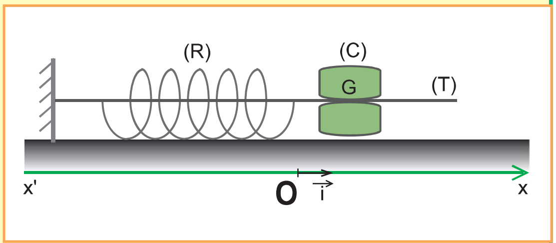


Fig.1

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre d'une distance x_0 = 2 cm et on l'abandonne à lui-même à un instant t_0 choisi comme origine des temps.

1°) Dans une première expérience, le cylindre est abandonné sans vitesse initiale.

a) En appliquant le théorème du centre d'inertie, montrer que les oscillations du centre d'inertie G du cylindre (C) sont sinusoïdales de pulsation propre ω_0 que l'on calculera.

b) Montrer, par la détermination de $\frac{dE}{dt}$, que le système (cylindre, ressort) est conservatif.

c) Exprimer l'énergie mécanique E en fonction de k et de x_0. En déduire que l'amplitude X_{m1} est égale à x_0.

d) Déterminer l'équation horaire du mouvement de G.

2°) Dans une deuxième expérience, le cylindre (C) est abandonné avec une vitesse initiale $v_0 = 0{,}2\ m.s^{-1}$.

a) Qu'est-ce qui change dans les oscillations du pendule ?

Justifier qualitativement la réponse.

b) Sachant que l'élongation de G s'écrit : $x(t) = X_{m2} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$, déterminer l'amplitude X_{m2}, la phase initiale φ_2 et la vitesse maximale V_{m2} de G.

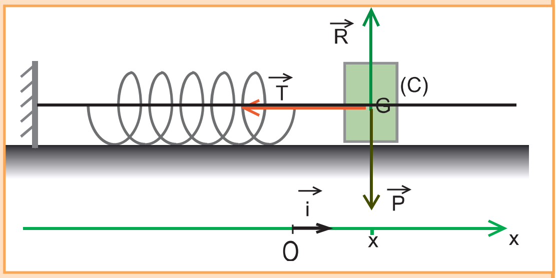
c) Calculer l'énergie mécanique E_{02} de l'oscillateur à l'instant $t_0 = 0$.

d) Retrouver énergétiquement les valeurs de X_{m2} et de V_{m2}.

3°) Comparer les énergies mécaniques du système {cylindre + ressort} dans les deux expériences considérées.

SOLUTION

1°) a) A un instant t donné, lorsque le cylindre (C) est en mouvement, il est soumis aux forces extérieures suivantes : son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ de la tige et la tension $\vec{T}$ du ressort.
L'application du théorème du centre d'inertie au cylindre (C) donne : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$.
Par projection orthogonale sur Ox, on obtient :



$-\ kx = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. D'où l'équation différentielle :

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$ (1), avec $\omega_o^2 = \dfrac{k}{m}$. Les oscillations du cylindre (C) sont donc sinusoïdales de pulsation : $\boxed{\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$.

A.N. : ω_o = 10 rad.s^{-1}

b) L'énergie mécanique de l'oscillateur est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle : $E = E_C + E_P = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$.

La dérivée de E par rapport au temps donne : $\dfrac{dE}{dt} = kx\dfrac{dx}{dt} + mv\dfrac{dv}{dt}$. Or, $v = \dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

D'où : $\dfrac{dE}{dt} = v\left[kx + m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right]$. D'après l'équation différentielle (1), le terme $\left[kx + m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right]$ est nul quelle que soit v . Donc, $\dfrac{dE}{dt} = 0$, ce qui signifie : le système {cylindre, ressort} est conservatif.

c) Le système {cylindre, ressort} étant conservatif, son énergie mécanique E_1 est constante. Donc, $E_1 = E(t=0) = E_{01}$.

Or, à l'instant $t_o = 0$: $v_o = 0$ et $x = x_o$; d'où : $E_{o1} = \dfrac{1}{2}kx_o^2$.

On sait que pour $x = \pm X_{m1}$, v = 0. Donc, $E_1 = \dfrac{1}{2}kX_{m1}^2$.

Par suite, $\dfrac{1}{2}kX_{m1}^2 = \dfrac{1}{2}kx_o^2$. Cela donne : $X_{m1} = x_o$.

d) L'équation horaire du mouvement de G est de la forme : $x(t) = X_{m1}\sin(\omega_0 t + \varphi_1)$.

A t = 0 ; $x_o = X_{m1}\sin\varphi_1$. Or, $X_{m1} = x_o$ = 0.02 m ; d'où $\sin\varphi_1 = 1$. Ce qui donne : $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

Finalement : $\boxed{x(t) = 0{,}02\sin(10t + \dfrac{\pi}{2})}$.

2°) a) Etant abandonné à lui-même avec une vitesse initiale v_o, l'oscillateur possède une énergie mécanique E_{o2} supérieure à son énergie mécanique E_{o1} lorsqu'il est abandonné sans vitesse dans la première expérience, ce qui rend l'amplitude X_{m2} des oscillations dans la deuxième expérience supérieure à $X_{m1} = x_o$.

b) On a : $x(t) = X_{m2}\sin(\omega_o t + \varphi_2)$

Par dérivation de l'élongation : $x(t) = X_{m2}\sin(\omega_o t + \varphi_2)$, on obtient la vitesse :

$v(t) = X_{m2}\,\omega_o \cos(\omega_o t + \varphi_2)$.

A $t_o = 0$, $x_o = X_{m2}\sin\varphi_2$ (1) et $v = v_o = X_{m2}\,\omega_o\cos\varphi_2$ (2)

Le rapport $\frac{(1)}{(2)}$ donne : $tg\varphi_2 = \frac{x_o\omega_o}{v_o}$. A.N : $tg\varphi_2 = 1$; d'où $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ rad ou bien $\frac{3\pi}{4}$ rad.

Or $v_0 = X_{m2}\omega_o\cos\varphi_2 > 0$. Donc, $\cos\varphi_2 > 0$. D'où, $\underline{\varphi_2 = \frac{\pi}{4}}$ rad.

D'après (1), on obtient $\boxed{X_{m2} = \frac{x_o}{\sin\varphi_2}}$.

A.N. : $X_{m2} \approx 2{,}83.10^{-2}$ m

$v(t) = X_{m2}\omega_o\cos(\omega_o t + \varphi_2)$ donne : $\boxed{V_{m2} = X_{m2}\,\omega_o}$

A.N. : $V_{m2} = 0{,}283$ m.s^{-1}.

c) A l'instant $t_o = 0$, $v = v_o$ et $x = x_o$, d'où : $\boxed{E_{o2} = \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}kx_o^2}$

A.N. : $\underline{E_{o2} = 4.10^{-3}\text{ J}}$.

d) Le système (cylindre-ressort) étant conservatif, E_2 est constante : $\boxed{E_2 = \frac{1}{2}kX_{m2}^2 = E_{o2}}$.

Ce qui entraîne : $\boxed{X_{m2} = \sqrt{\frac{2E_{o2}}{k}}}$

A.N : $\underline{X_{m2} \approx 2{,}83.10^{-2}\text{ m}}$

$E_{o2} = \frac{1}{2}mV_{m2}^2$, d'où : $\boxed{V_{m2} = \sqrt{\frac{2E_{o2}}{m}}}$.

AN : $\underline{V_{m2} = 2\sqrt{2}.10^{-1}\text{ m.s}^{-1}}$

3°) L'énergie mécanique E est proportionnelle au carré de l'amplitude X_m.

On a : $E_1 = \frac{1}{2}kX_{m1}^2$ et $E_2 = \frac{1}{2}kX_{m2}^2$. d'où : $\frac{E_2}{E_1} = \frac{X_{m2}^2}{X_{m1}^2}$.

Comme X_{m2} est supérieure à X_{m1}, il vient $\frac{E_2}{E_1} > 1$. Donc, $\underline{E_2 > E_1}$.

Remarque : on peut répondre à la question en comparant directement E_{o2} et E_{o1} car

$E_1 = E_{o1}$ et $E_2 = E_{o2}$.

En fait, $\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_{o2}}{E_{o1}} = 1 + \frac{1}{\omega_o^2}\left(\frac{v_o}{x_o}\right)^2 > 1$. Donc, $\underline{E_2 > E_1}$.

L'essentiel

- En régime forcé, le dispositif d'entretien des oscillations d'un pendule élastique constitue l'excitateur tandis que le pendule constitue le résonateur.
- La fréquence des oscillations forcées d'un pendule élastique est égale à celle de l'excitateur.
- En présence de frottements visqueux, les oscillations sinusoïdales forcées d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle : $\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F}$
avec $F = F_m\sin(\omega t + \varphi_F)$, valeur algébrique de la force excitatrice.
- En régime sinusoïdal forcé, le résonateur oscille en retard de phase par rapport à l'excitateur avec une amplitude X_m qui dépend de la fréquence N de l'excitateur :

$$\boxed{X_m = \frac{F_m}{\sqrt{4h^2\pi^2N^2 + (k - 4m\pi^2N^2)^2}}}$$

- En régime sinusoïdal forcé, la résonance d'élongation se produit à la fréquence :

$$\boxed{N_r = \sqrt{N_0{}^2 - \frac{h^2}{8\pi^2m^2}}}$$

- La résonance est d'autant plus aiguë que l'amortissement est plus faible.
- Dans le cas d'un amortissement important, la résonance est floue. Lorsque h dépasse la valeur limite $\boxed{h_l = m\omega_0\sqrt{2}}$, la résonance devient impossible.
- En régime sinusoïdal forcé, la puissance mécanique moyenne est donnée par la relation :

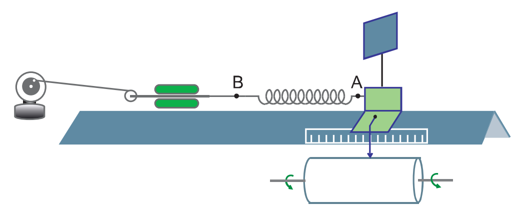
$$\boxed{P = \frac{1}{2}hV_m^2}$$

Exercices

Exercice résolu 1

ÉNONCÉ

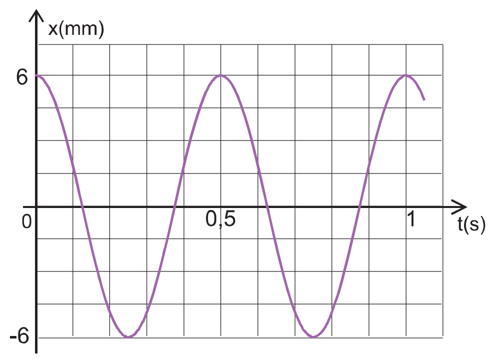
L' extrémité B d'un ressort de raideur k = 40 $N.m^{-1}$ est reliée indirectement à un excentrique fixé à un moteur. La deuxième extrémité A du ressort est attachée à un palet (S) de masse m = 100 g. Sur (S) est fixée une plaque rectangulaire comme l'indique la figure ci–contre. Le système {palet – ressort} se déplace sur un banc à coussin d'air horizontal.



Lorsque le moteur tourne à une fréquence N, le palet (S) effectue des oscillations de part et d'autre de sa position de repos.

Un stylet fixé sur le palet permet d'enregistrer la position du centre d'inertie G de (S) au cours du temps.

On obtient la courbe x(t) ci contre . x étant l'abscisse du centre d'inertie G du palet (S) dans un repère galiléen $(O,\vec{i})$ horizontal. Le point O correspond à la position de G lorsque le palet est au repos.



1°) a) Préciser le rôle joué par le moteur muni de l'excentrique et celui joué par le système {palet – ressort}?

b) Déterminer la fréquence et l'amplitude X_m des oscillations du palet (S).

c) Ecrire x(t).

2°) On modifie la fréquence N de rotation du moteur et on note à chaque fois l'amplitude X_m des oscillations du palet (S). Les résultats des mesures sont rassemblés dans le tableau suivant :

N (Hz)	1.5	2	2.5	2.8	3.1	3.2	3.3	3.6	4	4.5
X_m (mm)	4	6	10	15	21	23	20	15	10	7

a) Tracer le graphe X_m = f (N) traduisant la variation de l'amplitude X_m des oscillations en fonction de la fréquence N.

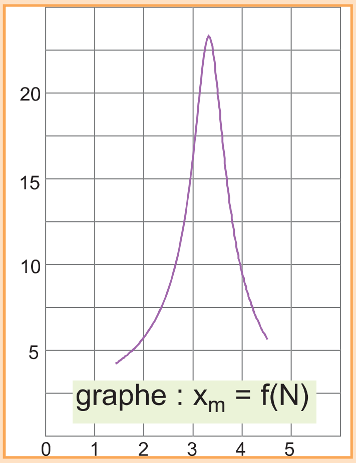
b) Déterminer la fréquence N_r des oscillations à la résonance et la comparer à la fréquence propre N_0 des oscillations libres du pendule élastique.

c) Comment la courbe X_m = f (N) serait modifiée si on remplace la plaque par une autre de surface plus grande?

SOLUTION

1°) a) Le moteur muni de l'excentrique joue le rôle de l'excitateur. Le système { palet - ressort } joue le rôle de résonateur.

b) D'après l'enregistrement x(t), la période des oscillations est T = 0.5 s donc la fréquence vaut 2 Hz. L'amplitude des oscillations est X_m = 6 mm.



c) $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$

à t = 0 ; $x = X_m \sin\varphi_x = X_m$, d'où : $\sin\varphi_x = 1$ et $\varphi_x = \frac{\pi}{2}$ rad

$\omega = 2\pi N = 4\pi$ rad.s^{-1}. Finalement :

$$\boxed{x(t) = 6.10^{-3} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

2°) a) Voir graphe: $X_m = f(N)$

b) N_r = 3.15 Hz.

$N_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, soit numériquement : N_o = 3,18 Hz.

On remarque que N_r est légèrement inférieure à N_o.

c) Lorsqu'on remplace la plaque fixée sur le palet par une autre de surface plus grande, l'amortissement augmente, X_m est moins important à la résonance. La courbe présentera un pic moins prononcé ; la résonance est moins auguë.

Exercice résolu 2

ÉNONCÉ

Une voiture roule sur une piste saharienne, avec une vitesse constante. Elle rencontre des bosses régulièrement espacées d'une distance d = 20 m les unes des autres. La masse totale de la voiture et de son conducteur est m = 1000 kg.

1°) Sachant que la voiture est assimilable à un système { solide ; ressort } oscillant verticalement, montrer que le conducteur doit éviter de rouler à une vitesse critique v_c. Calculer v_c sachant que la raideur du ressort vaut k = 4.10^4 N.m^{-1}.

2°) Expliquer le rôle des amortisseurs de la voiture.

SOLUTION

1°) La série de bosses régulièrement espacées impose à la voiture des oscillations forcées de période T égale à la durée séparant les passages de la voiture sur deux bosses successives : $T = \frac{d}{v}$. L'ensemble (voiture ; amortisseurs) se comporte comme un oscillateur mécanique de période propre : $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. La résonance a lieu lorsque T = T_o, ce qui est obtenu pour une certaine vitesse $v = v_c$. On aura alors : $\frac{d}{v_c} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ d'où : $V_c = \frac{d}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Soit, numériquement v_c = 20,14 m.s^{-1} ou v_c = 72,5 km.h^{-1}.

2°) Les amortisseurs absorbent une partie de l'énergie des oscillations. L'amplitude des secousses provoquées par la succession des bosses est ainsi diminuée, ce qui entraîne une meilleure tenue de route et donc plus de sécurité.

L'essentiel

- On appelle onde, le phénomène résultant de la propagation d'une succession d'ébranlements dans un milieu donné.

- Une onde est dite transversale si la direction des déformations auxquelles elle est due est perpendiculaire à la direction de sa propagation.

- Une onde est dite longitudinale si la direction des déformations auxquelles elle est due est parallèle à la direction de sa propagation.

- La propagation d'une onde correspond à un transport d'énergie sans déplacement de matière.

- La célérité (ou vitesse de propagation) d'une onde dépend de la nature du milieu de propagation et de ses propriétés.

- Toute onde se propageant dans un milieu ouvert est progressive. Elle est caractérisée par une double périodicité spatiale et temporelle.

- La période temporelle T de l'onde est liée à la période spatiale λ par la relation :

$\boxed{\lambda = \mathbf{v.T}}$, avec v la célérité de l'onde.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

A l'extrémité libre O d'une lame vibrant sinusoïdalement avec une fréquence N = 100 Hz, on attache une corde élastique de longueur l = 0,6 m. Etant tendue, celle-ci est le siège d'une onde progressive sinusoïdale transversale non amortie d'amplitude a = 5 mm, de phase initiale nulle et de célérité v = 12 $m.s^{-1}$.

1°) Etablir l'équation horaire de mouvement du point M de la corde situé au repos à x = 21 cm de la source et comparer ses vibrations avec celles de la source.

2°) Représenter dans le même système d'axes, les diagrammes des mouvements de la source et du point M .

3°) Déterminer le lieu et le nombre des points de la corde vibrant en quadrature avance de phase par rapport à la source.

4°) Représenter l'aspect de la corde à l'instant $t_1 = 3{,}25.10^{-2}$ s et en déduire celui pris à l'instant $t_2 = 3{,}75.10^{-2}$ s.

SOLUTION

1°) L'onde se propage sans amortissement. Donc, à tout instant t, on a :

$y_M(t) = y_0(t - \theta)$; $\theta = \dfrac{x}{v}$: temps mis par l'onde pour se propager de O à M.

Or : $y_0(t) = a\sin(\omega t)$. Il vient donc : $y_M(t) = a\sin(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda})$; $\varphi = -\dfrac{2\pi x}{\lambda}$

$\lambda = \dfrac{v}{N}$; A.N : λ = 12 cm, ce qui donne $\varphi = -\dfrac{7\pi}{2} = (-4\pi + \dfrac{\pi}{2})$ rad.

$$\boxed{y_M(t) = 5.10^{-3}\sin(200\,\pi t + \frac{\pi}{2}).}$$

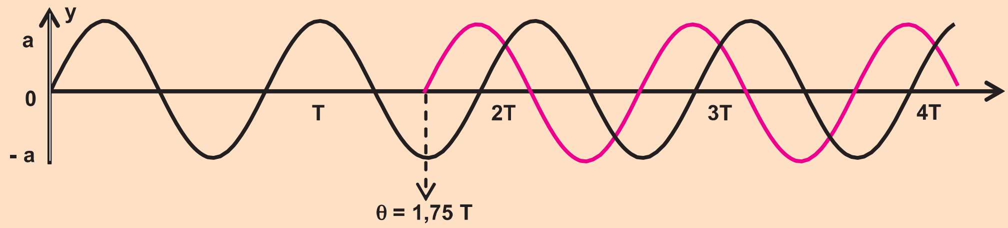
Donc, le point M vibre avec la même amplitude que la source mais en quadrature avance de phase par rapport à cette dernière.

2°) Diagrammes des mouvements de S et de M
Si le mouvement de la source débute à t = 0, le point M ne commencera à vibrer qu'à $t_1 = \theta$, temps mis par le front de l'onde pour se propager de la source jusqu'au point M.

$\theta = \frac{x}{v}$. Or, $x = \frac{7}{4}\lambda$; Donc $\theta = \frac{7}{4}T = 1{,}75\ T$

Pour tout $t < \frac{7}{4}T$, $y_M(t) = 0$ et pour tout $t > \frac{7}{4}T$, $\boxed{y_M(t) = a\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}$.

En effet, le diagramme de mouvement du point M s'obtient par une translation de celui de la source d'une longueur représentant θ suivant l'axe des temps.



3°) Un point M de la corde vibre en quadrature avance de phase par rapport à la source si :

$\Delta\varphi = -\frac{2\pi x}{\lambda} = -(4k-1)\frac{\pi}{2}$ rad, ce qui conduit à $\boxed{x = (4k-1)\frac{\lambda}{4}}$.

Or, $x \le l$. D'où : $k \le \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{4}$.

$\frac{l}{\lambda} = 5$. Donc, $\underline{k \le 5{,}25}$. Or, $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors : $k \le 5$; $\underline{k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}}$.

k	1	2	3	4	5
x (cm)	9	21	33	45	57

On remarque que le point M situé à x = 21 cm est bien l'un de ces cinq points.

4°) Distance parcourue par l'onde entre sa naissance (à $t_o = 0$) et l'instant t_1.

$x_1 = v\,t_1$; soit : $x_1 = \lambda\frac{t_1}{T}$. Or, $\frac{t_1}{T} = 3{,}25$.

Donc, $\underline{x_1 = 3{,}25\,\lambda}$. On constate que x_1 est inférieur à l.

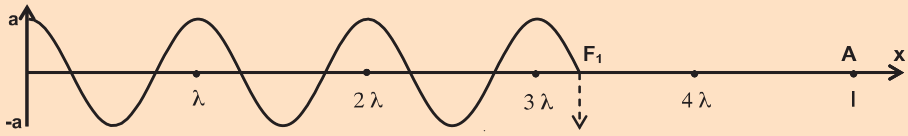
En effet, $l = 5\lambda$. Donc, l'onde n'a pas encore atteint l'extrémité fixe de la corde

Ainsi, x_1 représente la position x_{f_1} du front d'onde .

∞Pour $x > x_{f_1}$, $y_{t_1}(x) = 0$: le brin F_1A de la corde est encore au repos.

∞Pour $x < x_{f_1}$, $y_{t_1}(x) = a\sin(\omega t_1 - \frac{2\pi x}{\lambda})$, $\omega t_1 = \frac{2\pi}{T}t_1$. Or, $\frac{t_1}{T} = 3{,}25$

Donc, $\omega t_1 = 6{,}5\,\pi$ rad. Par suite, $\boxed{y_{t_1}(x) = a\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})}$, d'où l'aspect suivant de la corde à l'instant t_1,



$x_{f_1} = 3{,}25\ \lambda$

Remarques :

- On retrouve bien pour le point M de la question (1) situé à x = 1,75 λ, une élongation y nulle à $t_1 = 3{,}25$ T.
- Il y a une autre méthode pratique permettant de dessiner rapidement la partie de la corde parcourue par l'onde sans recourir à l'expression $y_{t_1}(x)$.

En effet, il suffit d'extrapoler la sinusoïde de période λ jusqu'au point source, et ce en partant de la position du front d'onde.

- Aspect de la corde à l'instant $t_2 = 3{,}75.10^{-2}$ s :

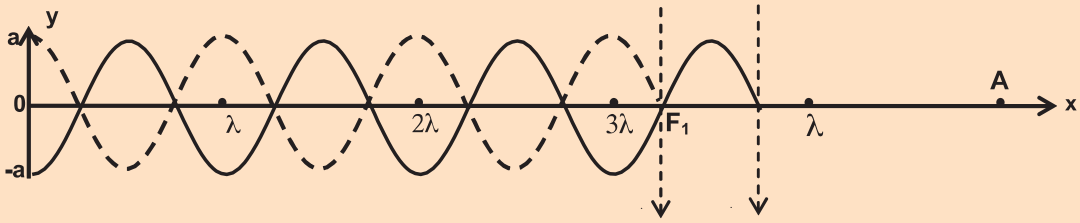
$\frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{1}{2}$, ce qui signifie : $(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}T$.

Donc, entre t_1 et t_2 l'onde progresse de la distance $\frac{\lambda}{2}$.

Ainsi, à t_2, le front d'onde se trouve à $\boxed{x_{f_2} = x_{f_1} + \frac{\lambda}{2}}$.

Or, $x_{f_1} = 3{,}25\ \lambda$. Donc, $x_{f_2} = 3{,}75\ \lambda$.

D'où l'aspect de la corde à t_2, représenté ci-dessous :



x_{f_1} $x_{f_2} = 3{,}75\ \lambda$

L'essentiel

- La diffraction d'une onde est la modification de son trajet et par suite sa forme au voisinage d'une ouverture ou d'un obstacle de dimensions comparables à sa longueur d'onde.
- La diffraction d'une onde se fait sans changement de sa longueur d'onde.
- Un faisceau de lumière est décrit comme étant une onde appelée onde lumineuse.
- Le phénomène de diffraction dépend du quotient $\frac{\lambda}{a}$, λ étant la longueur d'onde et **a** l'ouverture de la fente.
- Une lumière monochromatique est une onde progressive sinusoïdale caractérisée par sa fréquence ν et sa longueur d'onde λ_0 dans le vide.
- Une lumière polychromatique est constituée de plusieurs radiations.
- La lumière blanche est une lumière polychromatique.
- Une onde mécanique, comme une onde lumineuse, peut subir le phénomène de réflexion à la rencontre d'un obstacle plan.
- La réfraction d'une onde mécanique est le changement de sa longueur d'onde et de sa direction de propagation, au niveau de la surface de séparation de deux milieux de propagation.
- Le phénomène de dispersion de la lumière est la variation de sa célérité v dans un milieu transparent d'indice n, en fonction de sa fréquence ν.
- On appelle milieu dispersif tout milieu dans lequel la célérité v d'une onde périodique dépend de sa fréquence.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

Un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde λ, éclaire une fente fine rectangulaire de largeur réglable **a.** Sur un écran E placé à une distance D = 3 m de la fente, on observe la figure de diffraction.

On fait varier la largeur **a** de la fente et on mesure la largeur **L** de la tache centrale de la figure de diffraction. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant.

a (mm)	0,10	0,14	0,20	0,25
L (mm)	31,5	22,5	16,0	12,5

1°) Décrire brièvement la figure de diffraction formée sur l'écran E.

2°) Tracer la courbe représentant **L** en fonction de 1/a et calculer sa pente.

3°) Donner la relation entre la largeur **L** de la tache centrale et la longueur d'onde λ.

4°) Déterminer la valeur de la longueur d'onde λ de la lumière utilisée.

5°) En remplaçant la fente par un cheveu de diamètre **d**, la largeur de la tache centrale qui se forme sur l'écran devient L' = 1,5 cm.

Calculer de deux manières le diamètre **d** du cheveu.

SOLUTION

1°) Sur l'écran E se forme une figure étalée horizontalement, constituée d'une tache centrale lumineuse brillante de largeur L, entourée de part et d'autre par des taches lumineuses séparées par des zones sombres comme le montre la figure 1.

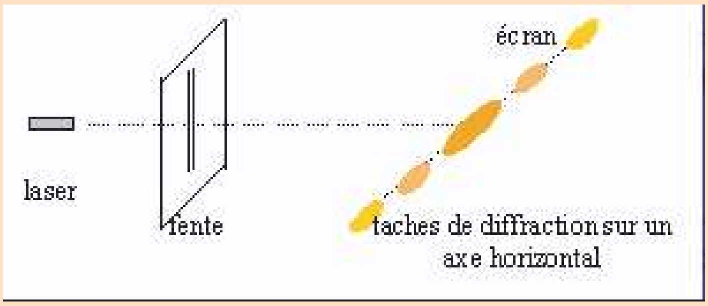
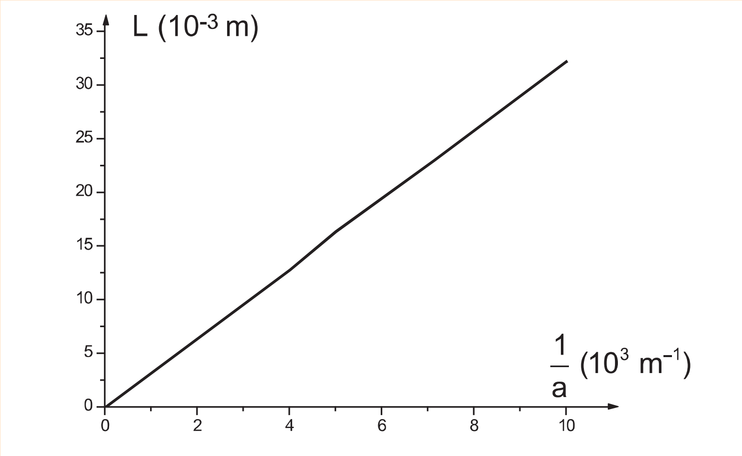


Fig.1

2°) La courbe représentant L en fonction de 1/a est une droite linéaire. Ainsi, on peut écrire :

$\boxed{L = \frac{k}{a} = \frac{3{,}15.10^{-6}}{a} \quad (1)}$ avec k la pente de la droite tracée.



3°) $\boxed{L = 2.\frac{\lambda D}{a} \quad (2)}$

4°) A partir des relations (1) et (2) et par identification, on peut écrire : $2.\lambda.D = k$, ce qui donne :

$$\boxed{\lambda = \frac{k}{2D}}$$

A.N. : $\lambda = 525.10^{-9}$ m

5°) Première méthode :

L'obstacle (cheveu) de largeur d (diamètre du cheveu) donne sur l'écran une figure de diffraction dont la tache centrale a d'après la relation (2) une largeur $\boxed{L' = 2.\frac{\lambda D}{d}}$ (en remplaçant a par d), ce qui donne : $\boxed{d = 2\frac{\lambda D}{L'}}$.

A.N. : $d = 0{,}21.10^{-3}$ m, soit $d = 0{,}21$ mm.

Deuxième méthode :

Par exploitation de la courbe représentant $L = f(\frac{1}{a})$, on détermine l'abscisse $(\frac{1}{d})$ correspondant à une valeur de L' égale à 1,5 cm et par suite la valeur de **d**.

L'essentiel

■ L'énergie de l'atome est **quantifiée**, c'est-à-dire qu'elle ne peut prendre qu'une suite de valeurs discrètes.

■ Dans son état fondamental (état le plus stable), un atome est à son plus bas niveau d'énergie. En lui apportant de l'énergie, un atome peut se trouver dans l'un de ses états excités.

■ On appelle transition atomique tout passage de l'atome d'un niveau d'énergie à un autre.

■ Lors de l'absorption d'un photon d'énergie $h\nu$, l'atome passe d'un niveau d'énergie E_n à un niveau d'énergie E_p supérieure. L'énergie de l'atome varie de $\boxed{\Delta E_{n,p} = E_p - E_n = h\nu.}$

■ Lors de l'émission d'un photon d'énergie $h\nu$, l'atome passe d'un niveau d'énergie E_p à un niveau d'énergie E_n inférieure. L'énergie de l'atome varie de $\boxed{\Delta E_{p,n} = E_n - E_p = - h\nu.}$

■ L'énergie quantifiée de l'atome d'hydrogène est : $\boxed{E_n = -\frac{E_0}{n^2}}$ en eV, avec n nombre entier supérieur ou égal à 1 et $E_0 = 13{,}6$ eV.

■ Toute radiation lumineuse de fréquence ν est émise sous forme d'un flux de photons, particules sans masse et d'énergie élémentaire $W = h\nu$.

■ Dans un spectre d'émission ou d'absorption, chaque raie représente une transition d'un niveau E_p à un niveau E_n produite par l'émission ou l'absorption d'un photon de fréquence ν telle que : $\boxed{|E_p - E_n| = h\nu.}$

■ Le spectre d'émission ou d'absorption d'un atome constitue «sa carte d'identité».

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont données par l'expression :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (en eV).}$$

1°) Calculer les valeurs des niveaux d'énergie E_1, E_2 et E_3.

2°) Que nomme-t-on le premier niveau ?

3°) Pour quelle valeur de n, E_n est nulle ? Dans quel état, l'atome d'hydrogène, se trouve-t-il ?

4°) Calculer la fréquence de la radiation émise quand l'atome passe du niveau E_2 au niveau E_1.

5°) En déduire la longueur d'onde correspondante. A quel domaine spectral appartient-elle ?

On donne : $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s , $c = 3.10^8$ m.s^{-1} et 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J.

SOLUTION

1°) Les valeurs des niveaux d'énergie sont données par application de la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}.$$

E_1 = - 13,60 eV , E_2 = - 3,40 eV et E_3 = - 1,51 eV.

2°) E_1 correspond au niveau fondamental.

3°) L'énergie E_n est nulle pour n qui tend vers l'infini ; l'atome d'hydrogène est ainsi ionisé (H^+).

4°) Le passage de l'atome d'hydrogène du niveau d'énergie E_2 au niveau inférieur E_1, se traduit par l'émission d'un photon d'énergie $h\nu_{2,1} = E_2 - E_1$, donc de fréquence

$$\boxed{\nu_{2,1} = \frac{E_2 - E_1}{h}}$$

A.N : $\nu_{2,1} = 2{,}46.10^{15}$ Hz

5°) $\nu_{2,1} = \frac{c}{\lambda_{2,1}} \Leftrightarrow \lambda_{2,1} = \frac{c}{\nu_{2,1}}$

A.N : $\lambda_{2,1}$ **= 122 nm**

Cette radiation appartient au domaine de l'ultraviolet (UV).

L'essentiel

- Une particule de masse m, au repos dans un référentiel donné, a une énergie de masse : $\boxed{E_o = m\,c^2}$ avec c la célérité de la lumière dans le vide.
  C'est la relation d'Einstein.

- La relation d'Einstein traduit l'équivalence masse-énergie.
- La masse est une forme d'énergie potentielle.
- La dissociation d'un noyau au repos ${}^{A}_{Z}X$ en nucléons séparés s'accompagne d'un défaut de masse : $\boxed{\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m({}^{A}_{Z}X) \text{ équivalent à } \Delta E = \Delta mc^2}$.

- Le MeV et le MeV.c^{-2} sont des unités respectivement d'énergie et de masse, adoptées à l'échelle du noyau de l'atome.

$$\boxed{1\,u = 931{,}5\ \text{MeV.c}^{-2}}$$

- L'énergie de liaison d'un noyau ${}^{A}_{Z}X$ est l'énergie qu'il faut lui fournir quand il est au repos dans un référentiel donné, pour le dissocier en nucléons séparés et au repos dans le même référentiel.

$$\boxed{E({}^{A}_{Z}X) = \Delta m({}^{A}_{Z}X).c^2}$$

- L'énergie de liaison par nucléon varie avec le nombre de masse A. Plus elle est élevée, plus le noyau est stable.

$$\boxed{E_\ell / A({}^{A}_{Z}X) = \frac{E_\ell / A({}^{A}_{Z}X)}{A} = \frac{\Delta m.c^2}{A}}$$

- Les noyaux les plus stables sont ceux dont le nombre des nucléons constitutifs est voisin de 60, ils ont une énergie de liaison par nucléon de l'ordre de 8 MeV.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

Le noyau de radon $^{222}_{86}Rn$, a une masse m = 221,97028 u.

1°) a) Quelle est la signification des nombres 86 et 222 ?

b) Donner la composition du noyau de radon 222.

c) En déduire, en unité de masse atomique (u), la masse des nucléons séparés.

2°) Calculer , en unité de masse atomique, le défaut de masse relatif au noyau de radon.

3°) a) Calculer, en MeV, l'énergie de liaison du noyau de radon 222.

b) En déduire, en MeV, la valeur de l'énergie de liaison par nucléon du même noyau.

4°) L' énergie de liaison de l'uranium 238 est E_ℓ = 1801,5 MeV.

Montrer que l'uranium 238 est moins stable que le radon 222 bien que son énergie de liaison est plus grande.

On donne :

1u = 1,66.10^{-27} kg = 931,5 MeV.c^{-2}.

la masse d'un proton : m_p = 1,00728 u.

la masse d'un neutron : m_n = 1,00867 u.

SOLUTION

1°) a) $^{A}_{Z}X$ étant le symbole d'un noyau, on peut affirmer que 86 est le nombre de charge Z et 222 est le nombre de masse A du noyau de $^{222}_{86}Rn$.

b) Le nombre de charge Z est le nombre de protons que renferme le noyau.

Le noyau de radon renferme donc 86 protons.

Le nombre de masse A représente le nombre de nucléons que renferme le noyau.

Par conséquent, le nombre de neutrons est N = A - Z = 136.

c) Soit m la masse totale des nucléons : $m = 86\ m_p + 136\ m_n$.

A.N : m = 223,80529 u.

2°) $\Delta m = m - m(^{222}_{86}Rn)$.

A.N : Δm = 1,83501 u.

3°) a) Par définition, l'énergie de liaison de $^{222}_{86}Rn$ est : $E_\ell = \Delta m.c^2$.

soit numériquement : E_ℓ = 1709,3 MeV.

b) L'énergie de liaison par nucléon est $E_\ell/A(^{222}_{86}Rn) = \dfrac{E_\ell(Rn)}{222}$.

A.N : $E_\ell/A(^{222}_{86}RN)$ = 7,7 MeV.

4°) Pour comparer les stabilités des deux noyaux, on compare leurs énergies de liaison par nucléon et non leurs énergies de liaison.

L'énergie de liaison par nucléon de l'uranium est $E_\ell/A = \dfrac{E_\ell(U)}{238}$ = 7,57 MeV.

D'où, $E_\ell/A(^{222}_{86}Rn) > E_\ell/A(^{238}_{92}U)$. Donc, le radon 222 est plus stable que l'uranium 238.

L'essentiel

■ Une réaction nucléaire est une transformation au cours de laquelle un ou plusieurs noyau(x) se désintègre(nt) en donnant un ou plusieurs noyau(x) nouveau(x) et éventuellement une ou plusieurs particules.
■ Une réaction nucléaire peut être spontanée ou provoquée. Dans les deux cas, elle peut être symbolisée par une équation qui obéït aux lois de conservation du nombre de masse et du nombre de charge.
■ La radioactivité est la transformation spontanée d'un noyau en un autre plus stable avec émission d'un rayonnement.

■ On distingue trois types de radioactivités :

• la radioactivité α (émission d'une particule α : noyau d'atome d'hélium ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$),

• la radioactivité β^- (émission d'un électron ${}^{0}_{-1}e$),

• la radioactivité β^+ (émission d'un positon ${}^{0}_{1}e$)

■ L'émission γ est un phénomène corrélatif qui se produit chaque fois qu'un noyau fils est obtenu à l'état excité.

■ La loi de décroissance radioactive est : $\boxed{N = N_o\, e^{-\lambda t}}$, avec N_o, le nombre de noyaux présents dans l'échantillon à l'instant t = 0 et λ la constante radioactive.

■ La demi vie (ou période radioactive) T d'une substance radioactive est la durée au bout de laquelle le nombre de noyaux initialement présents diminue de moitié.

$$\boxed{T = \frac{\ell n\, 2}{\lambda}}$$

■ L'activité A d'une substance radioactive est donnée par le nombre moyen de désintégrations par unité de temps, $A = A_o e^{-\lambda t}$ où A_o désigne l'activité à l'instant t = 0.

■ A cause du défaut de masse qui en résulte, une réaction nucléaire libère de l'énergie.

■ Un noyau lourd subit une réaction de fission lorsque, sous l'action d'un neutron lent, il se scinde en deux noyaux de masses comparables.

■ La fusion est une réaction nucléaire au cours de laquelle des noyaux très légers fusionnent en un noyau moins léger.

■ Les énergies libérées par les réactions nucléaires sont énormes ; toutefois, l'énergie libérée par la fusion est plus grande que celle libérée par la fission.

Exercices

Exercice résolu

ÉNONCÉ

I – 1°) Dans un réacteur nucléaire, un noyau d'uranium 235 capte un neutron lent et subit une fission symbolisée par l'équation suivante :

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{94}_{Z}Sr + {}^{A}_{54}Xe + 2\,{}^{1}_{0}n$$

Déterminer les nombres A et Z en précisant les lois utilisées.

2°) Dans le même réacteur, l'isotope ${}^{238}_{92}U$ de l'uranium peut capter un neutron rapide et se transformer en isotope 239 de l'uranium. Le noyau obtenu est radioactif. Par deux désintégrations successives spontanées de type β^-, il se transforme en plutonium.

Ecrire l'équation de chacune des désintégrations β^- et préciser les nombres de masse et de charge du noyau de plutonium formé.

3°) a) L'isotope ${}^{234}_{92}U$ de l'uranium est radioactif α. Ecrire l'équation de sa désintégration radioactive et identifier le noyau X formé en se référant au tableau suivant :

Elément	Hélium	Neptunium	Uranium	Protactinium	Thorium
Symbole du noyau	${}^{4}_{2}He$	${}^{236}_{93}Np$	${}^{234}_{92}U$	${}^{231}_{91}Pa$	${}^{230}_{90}Th$
Masse du noyau (en u)	4,0015	235,9956	233,9904	230,9860	229,9737

b) Calculer en MeV et en joule l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'uranium 234, puis celle libérée par un échantillon d'un gramme de cette substance radioactive.

c) En admettant que l'énergie libérée par la désintégration est répartie entre le noyau X et la particule α sous forme d'énergie cinétique et que le rapport des énergies cinétiques du noyau X et de la particule α est égal à l'inverse du rapport de leurs masses :

- déduire l'énergie cinétique de la particule α ainsi que celle du noyau X.
- calculer la vitesse de la particule α.

d) Certaines particules α émises ont en réalité une énergie cinétique égale à 13 MeV. L'écart entre cette valeur et la valeur calculée est expliqué par l'émission de radiations γ.

En déduire l'énergie de chacun des photons γ émis en même temps que ces particules α et calculer la longueur d'onde λ de l'onde associée.

II – L'uranium 238 est à l'origine d'une famille radioactive qui conduit à l'isotope stable du plomb ${}^{206}_{82}Pb$. Les désintégrations successives s'accompagnent d'une émission de particules α.

ou de particules β^-. Les noyaux intermédiaires étant d'une durée de vie suffisamment courte, on peut négliger leur présence dans les produits de la transformation. On assimile donc l'ensemble à une réaction unique :

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + x\alpha + y\beta^-$$

1°) Déterminer les coefficients x et y.

2°) On suppose qu'à l'instant t = 0 de formation de minerai contenant de l'uranium 238, celui-ci ne contient aucun noyau de plomb 206.

On désignera par :

N_0 le nombre initial de noyaux d'uranium 238.

N le nombre moyen de noyaux d'uranium 238 qui subsistent à l'instant t.

N' le nombre moyen de noyaux de plomb présents à l'instant t.

a) Exprimer le nombre moyen N' de noyaux de plomb présents à l'instant t dans le minerai considéré en fonction de t, λ et N.

b) Exprimer l'âge du minerai en fonction de la période T de l'uranium $^{238}_{92}U$ et du rapport $\frac{N'}{N}$.

On pourra supposer t << T et pour ε petit, on prendra $e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$.

c) Application numérique : sachant qu'à l'instant t, l'échantillon du minerai contient 1g d'uranium 238 et 10 mg de plomb, calculer l'âge du minerai.

On donne : T ($^{238}_{92}U$) = 4,5 10^9 ans,

M(U) = 238 $g.mol^{-1}$,

M(Pb) = 206 $g.mol^{-1}$,

$\ell n\, 2$ = 0,693,

1 u = 931,5 $MeV.c^{-2}$,

1 MeV = 1,6 10^{-19} J,

nombre d'Avogadro $\mathcal{N}$ = $6,02.10^{23}$,

constante de Planck h = $6,62.10^{-34}$ J.s,

célérité de la lumière c = 3.10^8 $m.s^{-1}$.

SOLUTION

I– 1°) D'après la loi de conservation du nombre de masse, on peut écrire :

235 + 1 = 94 + A + 2, ce qui donne : A = 140

D'après la loi de conservation du nombre de charge, on peut écrire : 92 = Z + 54, ce qui donne : Z = 38

2°) En respectant les lois de conservation précédentes, les équations des désintégrations β^- s'écrivent :

$${}^{239}_{92}U \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{239}_{93}X$$

$${}^{239}_{93}X \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{239}_{94}Pu$$

Remarque : On peut identifier, à l'aide du tableau périodique, la particule X intermédiaire à un noyau de neptunium Np.

3°) a) ${}^{234}_{92}U \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A}_{Z}X$

La loi de conservation du nombre de masse donne : A = 234 – 4 = 230

Celle de conservation du nombre de charge donne : Z = 92 – 2 = 90 .

Le noyau formé est donc l'isotope 230 du thorium : ${}^{230}_{90}Th$

b) Soit Δm, le défaut de masse qui accompagne la réaction nucléaire :

Δm = 233,9904 – [4,0015 + 229,9737] = $1,52.10^{-2}$ u,

comme 1u = 931,5 MeV.c^{-2} , on aura : $\Delta m \approx$ 14,16 MeV.c^{-2}, d'où une libération d'énergie W_1 = 14,16 MeV, soit $2,26.10^{-12}$ J.

Soit W, l'énergie libérée par un échantillon de masse m = 1 g d'uranium 234.

W = nW_1 avec n, nombre de noyaux contenus dans m = 1 g d'uranium 234 et W_1, l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'uranium 234.

$W = \frac{m\mathcal{N}}{M} W_1$ où $\mathcal{N}$ désigne le nombre d'Avogadro et M la masse molaire atomique de l'uranium 234.

A.N : W = $3,64.10^{22}$ MeV ; soit $5,8.10^{9}$ J.

c) L'énergie libérée par la réaction nucléaire se répartit, sous forme d'énergie cinétique, entre la particule α et le noyau de thorium ; on peut écrire :

$W = E_c(\alpha) + E_c(Th)$ (1)

On a aussi : $\frac{E_c(\alpha)}{E_c(Th)} = \frac{m_{Th}}{m_\alpha}$

En exprimant $E_c(\alpha)$ en fonction de $E_c(Th)$ on aura : $E_c(\alpha) = \dfrac{m_{Th} E_c(Th)}{m_a}$ (2)

En combinant (1) et (2), il vient : $E_c(Th)\left[1 + \dfrac{m_{Th}}{m_\alpha}\right] = W$. D'où :

$$\boxed{E_c(Th) = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_{Th}} w \quad \text{et} \quad E_c(\alpha) = \frac{m_{Th}}{m_\alpha + m_{Th}} w}$$

Soit numériquement : Ec (Th) = 0.242 MeV ; Ec(α) = 13.918 MeV

La particule α emporte la majeure partie de l'énergie libérée, soit $\dfrac{E_c(\alpha)}{W}.100 = 98{,}2\,\%$.

Vitesse de la particule α : $E_c(\alpha) = \dfrac{1}{2} m v_\alpha^2$ d'où : $\boxed{\|\vec{v}_\alpha\| = \sqrt{\dfrac{2E_c(\alpha)}{m_\alpha}}}$, soit numériquement :

$\|\vec{v}_\alpha\| = 2{,}59.10^7 m.s^{-1}$.

d – L'énergie du photon γ est: $E\gamma$ = 13,918 -13,000 = 0,918 MeV.

On sait que $E\gamma = \dfrac{hc}{\lambda}$, d'où : $\boxed{\lambda = \dfrac{hc}{E_\lambda}}$. A.N : $\lambda = 1{,}35.10^{-12}$ m.

II – 1°) L'écriture des lois de conservation du nombre total de nucléons et du nombre total de charges permet de déterminer x et y. On a les deux équations suivantes:

238 = 206 + 4x et 92 = 82 + 2x –y .

D'où : x = 8 et y = 6.

2°) a) Le nombre moyen de noyaux N' de plomb présents à l'instant t est égal au nombre moyen de noyaux d'uranium 238 désintégrés entre l'instant t = 0 et l'instant t, soit :

$$\boxed{N' = N(e^{\lambda t} - 1)}$$

b) Le résultat précédent permet d'écrire : $\dfrac{N'}{N} = e^{\lambda t} - 1 = e^{\frac{\ell n2}{T}t} - 1$. Or t « T fait que le terme $\dfrac{\ell n2}{T} t = \varepsilon$ est très petit ; on peut donc utiliser l'approximation : $e^{\frac{\ell n2}{T}t} \approx 1 + \dfrac{\ell n2}{T} t$.

On a donc $\dfrac{N'}{N} = \dfrac{\ell n2}{T} t$, ce qui donne l'âge du minerai : $\boxed{t = \dfrac{N'}{N} \dfrac{T}{\ell n2}}$

c) Le nombre moyen de noyaux d'uranium 238 présents dans un échantillon de masse m_U = 1 g est : $N_U = N = \dfrac{m_U \mathcal{N}}{M_U}$; celui de noyaux de plomb 206 présents dans un échantillon de m_{Pb} = 10 mg est : $N_{Pb} = N' = \dfrac{m_{Pb} \mathcal{N}}{M_{Pb}}$; $\mathcal{N}$ désigne le nombre d'Avogadro.

$t = \dfrac{N'}{N} \dfrac{T}{\ell n2} = \dfrac{m_{Pb}}{m_U} \dfrac{M_U}{M_{Pb}} \dfrac{T}{\ell n2}$; soit numériquement : $t = 75.10^6$ ans.