Lycée Remada Tataouine | Professeur : Hamdi Zantour
Année Scolaire : 2016 – 2017 | Classe : 3 ème Technique
Date : Lundi 15 Mai 2017 | Durée : 3 heures

Devoir de synthèse N°2
Mathématiques

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte, choisir la bonne case.

Questions	Réponses
1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\,x - 1 - \dfrac{x^2+2}{x^2-x+2}$ Au voisinage de $-\infty$, la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet comme asymptote oblique la droite d'équation	❒ $y = 2\,x - 1$ ❒ $y = 2\,x$ ❒ $y = 2\,(x-1)$
2. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$. Un argument du nombre complexe z^{2017} est égal à	❒ $\dfrac{5\,\pi}{3}$ ❒ $\dfrac{2\,\pi}{3}$ ❒ $\dfrac{\pi}{3}$
3. Soient $z \in \mathbb{C}$, E un point d'affixe $(1-i)^2$, F un point d'affixe $(1+i)^2$ et M un point d'affixe z. L'ensemble : $\{\, M(z)\,;\, \lvert \bar{z} - 2\,i \rvert = \lvert z - 2\,i \rvert \,\}$ est	❒ une droite ❒ un cercle ❒ vide
4. Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + 6\,x^2 - 5\,x - 6$ La courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse	❒ $x = 2$ ❒ $x = -6$ ❒ $x = -2$

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E, F et A d'affixes respectives : $z_E = -2 - i$, $z_F = -i + \sqrt{3}$ et $z_A = -2 + 2\,i$

1. a/ Vérifier que le point F appartient à un cercle que l'on caractérisera.

   b/ Placer soigneusement les points E, F et A.

   c/ Montrer que AEF est un triangle rectangle.

2. a/ Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_F}{z_A}$

b/ Montrer, en utilisant les formes polaires de z_F et z_A, que l'on a :

$$\frac{z_F}{z_A} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{11\,\pi}{12}\right].$$

c/ En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\,\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\,\pi}{12}\right)$.

3. a/ Déterminer le nombre complexe z_D affixe du point D pour que le quadrilatère $AEDF$ soit un parallélogramme.

b/ Soient $z \in \mathbb{C}$ et M un point d'affixe z, caractériser puis construire l'ensemble :

$$E = \left\{ M(z)\,;\, arg(z + 4\,i - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 3 (5 points)

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison égale à 2 et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = 2\,V_n + U_n \ , \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. a/ Déterminer le terme général de la suite U et montrer qu'elle est divergente.

b/ Montrer que la suite V n'est ni arithmétique ni géométrique.

c/ Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $V_n > 0$ et en déduire que V est strictement croissante.

d/ Montrer par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_n = n\,2^{n-1}$, en déduire que V diverge.

2. On définit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $W_n = \dfrac{V_n}{U_n}$

a/ Montrer que W est une suite arithmétique dont on présisera la raison et le premier terme.

b/ Exprimer W_n en fonction de n puis retrouver V_n en fonction de n.

Exercice 4 (6 points)

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x - 2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 4\,x - 5$$

On désigne respectivement par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes de f et de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a/ Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.

b/ Etudier la nature des branches infinies à $\mathscr{C}_g$.

c/ Montrer que la droite $\Delta : x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_g$.

d/ Tracer $\mathscr{C}_g$.

2. Etudier $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. a/ Montrer que, $\forall\, x \neq 2,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(2-x)^2}$

   b/ Dresser le tableau de variation de f.

4. a/ Vérifier, pour tout $x \neq 2,\ f(x) = \dfrac{9}{x-2} + x + 3$

   b/ En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ que l'on déterminera.

   c/ Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet le point $I(2,5)$ comme centre de symétrie.

5. a/ Etudier la position relative de Δ et $\mathscr{C}_f$.

   b/ Tracer $\mathscr{C}_f$.

6. Discuter graphiquement et suivant le paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

BON TRAVAIL