| Lycée ch -khaznadar Teboursouk<br>Prof : Rakrouki .M | Devoir de Controle n°3 | Classe : 4ème Math<br>Durée : 180 minutes<br>Date : 12/04/16 |
|---|---|---|

**EXERCICE 1 ( 5 pts ) :**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M(x , y) tels que : $-4y^2-6x+17=0$.
Montrer que $\mathcal{P}$ est une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.
2) Soit $D_1$ la droite d'équation x = 3 et M(x , y) un point du plan. On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de M sur $D_1$ et sur ( O, $\vec{i}$ ). On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M du plan tels que : $4MK^2-MH^2=8$.

a) Montrer que $M(x,y)\in\mathcal{H}$ si est seulement si : $-\frac{(x-3)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

b) En déduire que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets et les asymptotes.

3)a) Vérifier que T : $3x+2\sqrt{17}\,y-17=0$ est une tangente commune à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ au point $A\left(0,\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$.

b) Tracer T , $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit F la fonction définie sur IR+ par $F(x)=\int_2^{e^x-2e^{-x}+3}\sqrt{(t-3)^2+8}\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $\forall x\in[0;+\infty[,\ F'(x)=\left(e^x+2e^{-x}\right)^2$.

b) En déduire l'expression de F(x) pour tout $x\in[0;+\infty[$.

c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{H}$ et les droites $x=2$ et $x=\frac{13}{2}$.

Montrer que $\mathcal{A}=\frac{75}{8}+8\ln(2)$.

**EXERCICE 2 ( 5 pts ) :**

Une Urne contient cinq boules rouges numérotées 0 , 0 , 1 , 1 , 2 et trois boules jaunes numérotées 0 , 1 , 1. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément trois boules de l'Urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Obtenir trois boules de même couleur » B : « Obtenir une somme égale à 3 »

C : « Avoir trois boules de même couleur sachant qu'on a une somme égale à 3 »

2) Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage simultané de trois boules associe le produit des chiffres marqués sur les trois boules tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

3) On répète l'épreuve précédente n fois en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'Urne. Soit Y la variable aléatoire réelle indiquant le nombre de fois où on obtient trois boules de même couleur.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer l'espérance et la variance de Y.

c) Calculer la probabilité $P_n$ d'obtenir au moins une fois trois boules de même couleur puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n \geq 0,99$.

4) On considère maintenant l'épreuve suivante : On tire simultanément deux boules.

* Si on obtient deux boules de même couleur, sans les remettre on tire successivement et sans remise trois boules de l'Urne.

* Si on obtient deux boules de couleurs différentes, sans les remettre on tire successivement et avec remise trois boules de l'Urne.

Soit Z l'aléa numérique indiquant le nombre des boules rouges tirées.
Déterminer la loi de probabilité de Z.

**EXERCICE 3 ( 4 pts ) :**

Soient F et G les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$ et $G(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$.

1) En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[x\,;\,x+1]$, montrer que $\forall\, x\in\,]0;+\infty[$ on a $F(x)\leq 0\leq G(x)$.

2) Soient f et g les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ $et$ $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

a) Dresser le tableau de variations de f et celui de g.

b) En déduire que $\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[\,;\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

3) Montrer par récurrence que $\forall\, n\in IN^{*}$ ; $\frac{(n+1)^{n}}{n!}<e^{n}<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{n}}{(n+1)^{n}}$.

**EXERCICE 4 ( 7 pts ) :**

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(x+1)^{2}e^{-x}$. On désigne par $\zeta_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Dresser le tableau de variations de f puis tracer $\zeta_f$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Montrer que $\zeta_f$ admet deux points d'inflexion que l'on précisera.

2) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[-1;1]$ réalise une bijection de $[-1;1]$ sur un intervalle J que l'on précisera et tracer la courbe $\zeta_{g^{-1}}$ dans le même repère.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par $\zeta_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = - 1 et x = 1. Montrer que $\mathcal{A}=\frac{2e^{2}-10}{e}$ puis déduire que $\int_0^{\frac{4}{e}} g^{-1}(x)\,dx=\frac{14-2e^{2}}{e}$.

**4) Soit $(I_n)$ la suite définie sur IN* par** $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+1)^{n+1}e^{-x}\,dx$ .

**a) Montrer que pour tout entier** $n \in IN^*$ ; $0 \le I_n \le \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(e-e^{-1}\right)$.

**b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que** $\forall\, n \in IN^*$ ; $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+2}}{(n+2)!}e^{-1}$ .

**c) En déduire que pour tout entier** $n \in IN^*$ ; $I_n = e - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{2^k}{k!}$ .

**5) On pose, pour tout entier naturel** $n \in IN^*$ ; $U_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ .

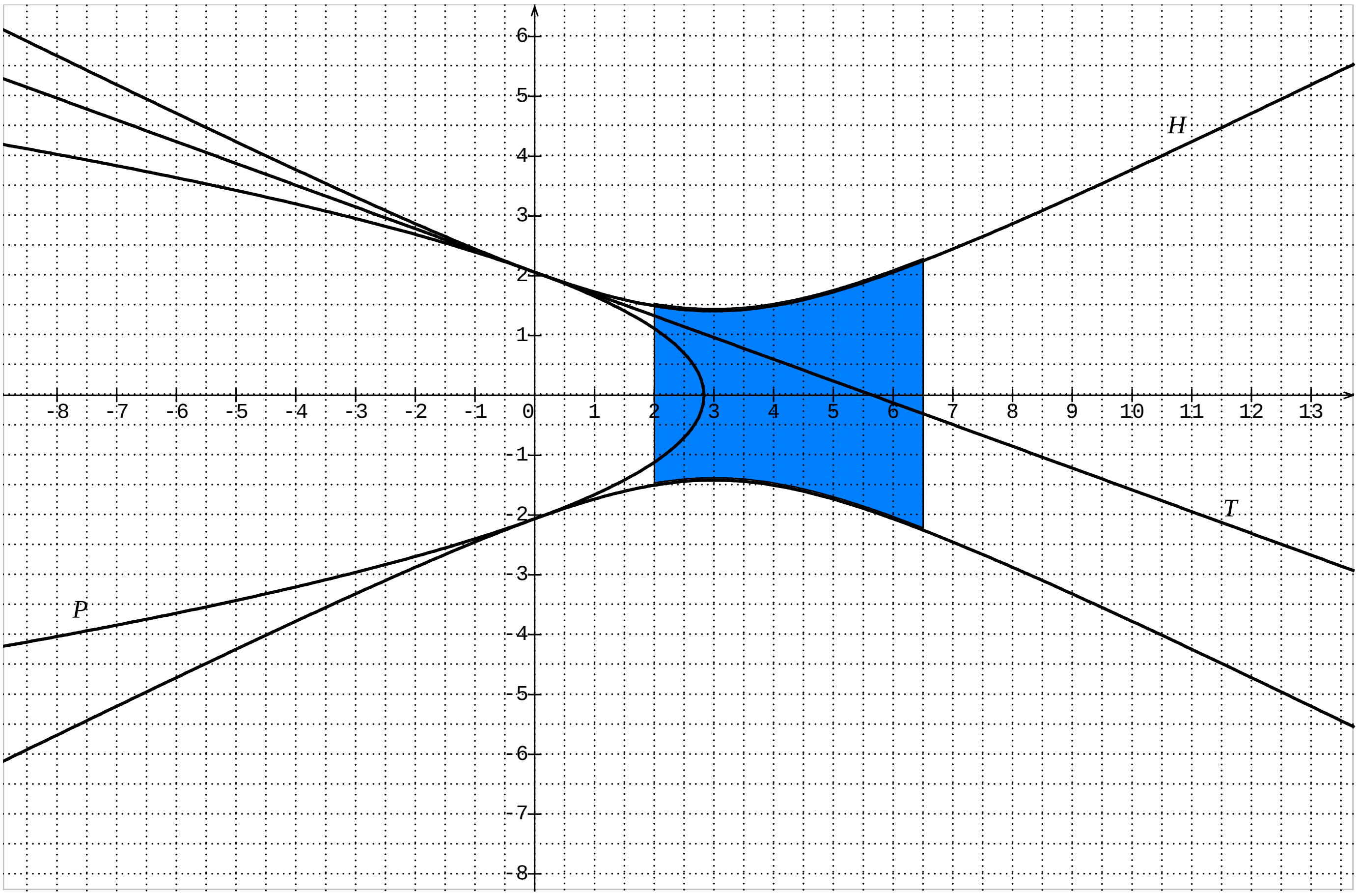
**a) Calculer** $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ **et vérifier que pour tout entier** $n \in IN^*$ ; $U_{n+1} \le \dfrac{2}{3}U_n$ .

**b) En déduire que** $n \in IN^*$ ; $0 \le U_n \le 3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ **puis calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ .

**6) Montrer alors que** $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{2^k}{k!} = e^2$ .

***BON TRAVAIL***

**EXERCICE 1 :**




**EXERCICE 4 :**