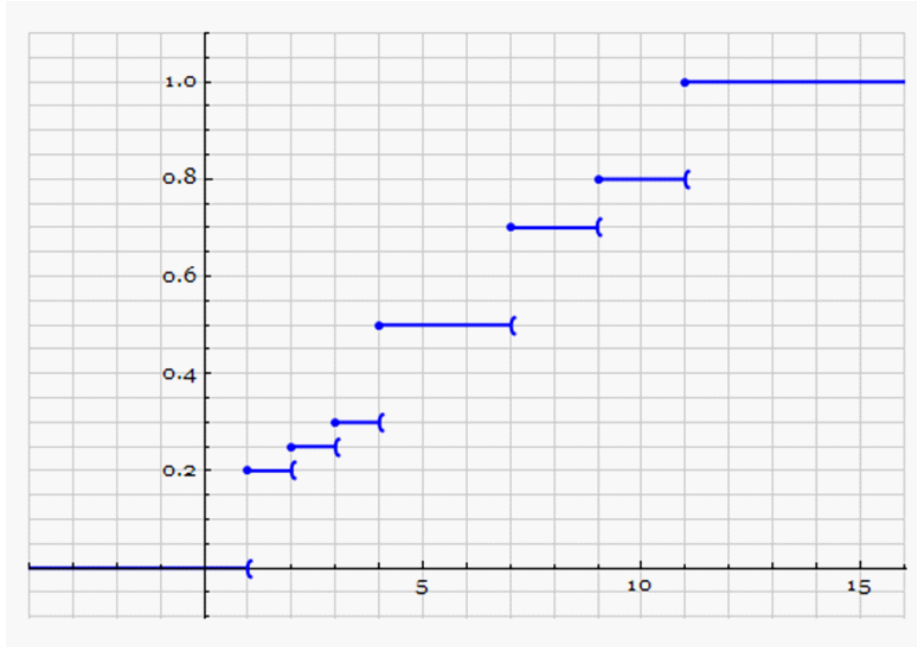


EXERCICE 1 (4pts)

Soit X la variable aléatoire définie sur un univers Ω dont la fonction de répartition F est représentée ci-contre dans le plan muni d'un repère orthogonal.

On admet que toutes les valeurs prises par X sont entières.



- Déterminer $X(\Omega)$.
- Déterminer la loi de probabilité de X en complétant le tableau suivant.

x_i
$p(X = x_i)$

- En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE 2 (6pts)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs: 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 .

Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres: des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

- Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock. On considère les événements:

H_1 : " L'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 "

H_2 : " L'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 "

H_3 : " L'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 "

C : " L'arbre choisi est un conifère"

F : " L'arbre choisi est un arbre feuillu"

- Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

- (b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .
- (c) Justifier que $p(C) = \frac{21}{40}$
- (d) L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ?
2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

- (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- (b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères?
- (c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus?
- (d) Calculer le nombre moyen des arbres conifères.

EXERCICE 3 (6pts)

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^x - xe^x + 1$

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(b) Montrer que $g'(x) = -xe^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

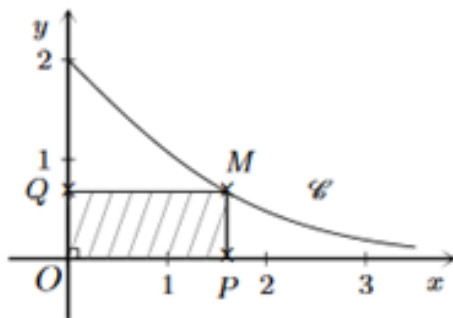
(c) En déduire le tableau de variation de g .
- (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une seule solution α et que $1,2 < \alpha < 1,3$

(b) Montrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$

(c) Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ et C_f dans un repère orthonormé d'origine O .
Soit les points $M(x, f(x))$, $P(x, 0)$ et $Q(0, f(x))$



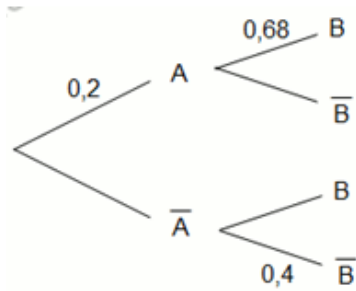
- Exprimer l'aire du rectangle $OPMQ$ en fonction de x .

- Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\varphi(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$

- (a) Montrer que $\varphi'(x)$ a le même signe de $g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
- (b) En déduire les variations de la fonction φ .
3. (a) Montrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque $x_M = \alpha$
- (b) Déterminer un encadrement de cette aire maximale.
- (c) La tangente T à C_f au point M d'abscisse α est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

EXERCICE 4 (4pts)

On considère l'arbre de probabilités suivant:



1. (a) Compléter cet arbre.
 (b) Déterminer $p(A | B)$ et $p(B)$
2. Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $e^x - e^{-x} = 0$

b) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

c) $e^{\frac{x}{2}} < e$