Lycée Secondaire El Ksour	Série De Révision	Prof Bouzouraa Chaouki
Année Scolaire 2016-2017	Mathématiques	BAC

Exercice N°1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $f(x)=\frac{e^x}{e^x+e}$ (on rappelle que $e=e^1$).
3. Montrer alors que $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln(2)+1-\ln(1+e)$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x)=\frac{1}{1+ne^{1-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général

$$u_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0.
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Exercice N°2

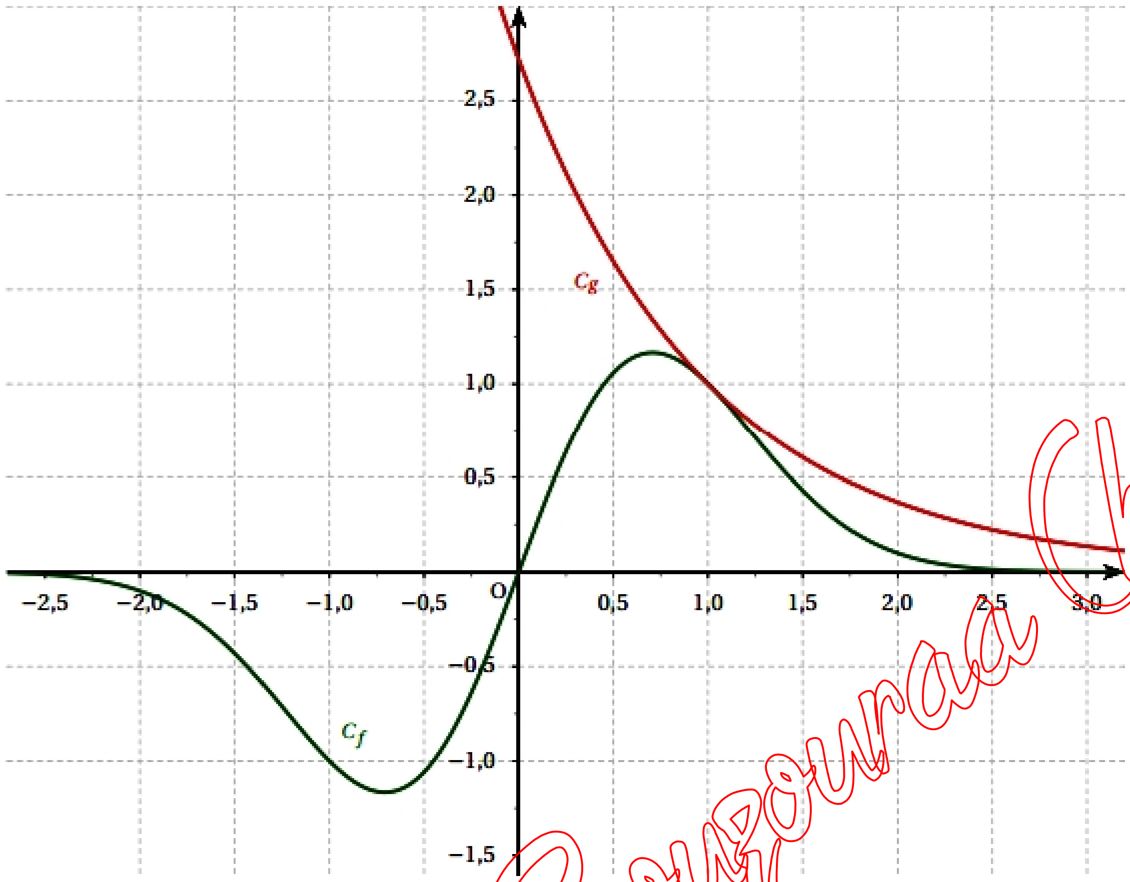
Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=xe^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0,
   $f(x)=\frac{e}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}$.
   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.
2. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x,
   $$f'(x)=\left(1-2x^2\right)e^{1-x^2}.$$
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x)=e^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
   a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,
   $$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$
   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.
   b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
   c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.
4. **a.** La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
   b. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.
   c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice N° 3

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

   est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

   Calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

   Interpréter graphiquement ce résultat.*

Exercice N°4

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.
   On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.
   a. Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
   d. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$.
   En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Interpréter graphiquement la quantité I_n.
   b. Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$,

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

   b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$,

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

   c. Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).
3. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}.$$

   b. En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.*