LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « $4^{éme}$ Sc. Techniques »	SERIE D'EXERCICES N°15 *Logarithme népérien*

EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (1 - lnx)^2$. On désigne par(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = -\frac{2}{x}(1 - lnx)$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Tracer la courbe (C).

EXERCICE 2 :

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par f(x)=x.ln(x+1)

On désigne par (C) la courbe représentative de f selon un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Vérifier que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et calculer f'(x) pour tout réel x de $]-1,+\infty[$.
2) Etablir le tableau de variation de la fonction dérivée f' de f.
3) Calculer $f'(0)$. En déduire le signe de f'(x) suivant les valeurs de x dans $]-1,+\infty[$.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f
5) Tracer la courbe (C).

EXERCICE 3 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\ln(x^2 - 2x + 2)$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) Vérifier que f est dérivable sur IR. Etablir le tableau de variation de f.
2) Montrer que la droite D : x =1 est un axe de symétrie de la courbe (C).
3) Etudier les branches infinies de (C) au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$
4) Montrer que (C) admet deux points d'inflexion, qu'on donnera leurs coordonnées.
5) Tracer (C).

EXERCICE 4 :

A/ On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x(x-1) + \ln x$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction g.
2) Calculer g(1). En déduire le signe de $g(x)$ suvant les valeurs de x dans $]0,+\infty[$.

B/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 + (\ln x)^2$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f selon un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Montrer que : $f'(x) = 2\frac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
3) Montrer que (C) admet au V $(+\infty)$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{\jmath})$.
4) Tracer la courbe (C).

C/ Soit h(x)= $\frac{f(x)}{x}$ pour tout $x > 0$

1) Vérifier que h(x)= $x - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}(\ln x)^2$
2) En déduire la primitive H de la fonction h sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

EXERCICE 5 :

Le tableau ci-contre représente les variations d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(a + b.\ln x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$ (où a et b sont deux réels).

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On suppose que la courbe représentative (C) de f passe par le point A(1,1) et que la tangente T à (C) en ce point a pour équation : $y = x$

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

   c) En déduire les valeurs de a et b.

2) Dans la suite on prend $\begin{cases} f(x) = x^2(1 - \ln x) \text{ pour tout } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

   a) Calculer $f'_d(0)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $(+\infty)$ qu'on précisera.

   c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et l'axe des abscisses.

   d) Tracer la tangente T et la courbe (C).

EXERCICE 6 :

I/ Soit la fonction φ : $x \longmapsto 1-2x.\ln x-x$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction φ.
2) Calculer $\varphi(1)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x dans $]0,+\infty[$.

II/ Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2.\ln x + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.
2) Etablir le tableau de variation de la fonction f.
3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.
   Vérifier que $2 < \alpha < 2,1$
4) Etudier la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
5) Tracer la courbe (C)

III/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)= x^3.\ln x$

1) Justifier l'existence des primitives de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$
3) En déduire la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

EXERCICE 7 :

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)= x^2 - 2+\ln x$

1) Etablir le tableau de variation de g .
2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.
   Vérifier que $1,3 < \alpha < 1,4$
3) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

B) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)= x^2 + (2 - \ln x)^2$

par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) Vérifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et montrer que $f'(x)=2.\frac{g(x)}{x}$ $\forall\, x > 0$

2) Etablir alors le tableau de variation de f.

3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

4) Montrer que $f(\alpha)= \alpha^2 + \alpha^4$

On prend dans la suite $\alpha \approx 1{,}3$ et $f(\alpha) \approx 4{,}5$

5) Tracer la courbe (C).

EXERCICE 8 :

A/ Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1) Montrer que $g'(x) = \frac{2x^2+4x+3}{x+1}$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3) Calculer $g(0)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

B/ On désigne par f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$

On note (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'unité graphique étant 2cm.

1) a/ Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

b/ Montrer que pour tout réel $x \in]-1,+\infty[$ on a :

$f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction .

2) a/ Montrer que (C) admet une asymptote oblique (qu'on notera (D)) au voisinage de $+\infty$.

b/ Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (D).

c/ Tracer la droite (D) et la courbe (C).

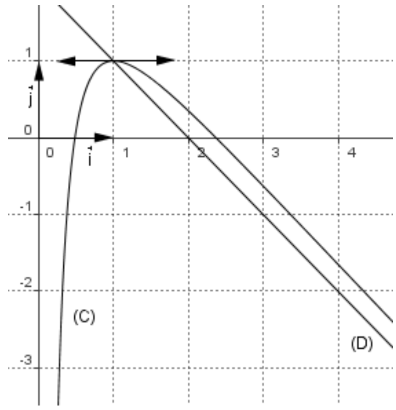
3) Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $h(x) = [\ln(x+1)]^2$

a/ calculer $h'(x)$ pour tout $\in]-1,+\infty[$.

b/ En déduire la primitive de la fonction f qui s'annule en 0.

EXERCICE 9 :

Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe (C) de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$ (a et b sont trois réels donnés).



La droite (D) : $y = -x + 2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $(+\infty)$.

L'axe $(O,\vec{\jmath})$ est une asymptote verticale.

L'unique tangente parallèle à l'axe $(O,\vec{\imath})$ est au point A(1,1).

1) A l'aide du graphique dresser le tableau de variation de la fonction f (contenant le tableau de signe de $f'(x)$).

2) a) A l'aide du graphique déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + x]$.

b) En déduire les valeurs de a et b.

■ On prend dans toute la suite : $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$

3) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : g(x)= $f(x) + x$

a) Montrer que g'(x)= $\frac{1-lnx}{x^2}$ pour tout $x > 0$.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

c) En déduire que l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

EXERCICE 10 :

A/ Soit la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)= \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$

1) Vérifier que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et montrer que $g'(x)= \frac{x-2}{(x-1)^2}$ pour tout $x > 1$.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$

3) Dresser le tableau de variation de g. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x > 1$.

B/ On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=x.\ln(x-1)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Vérifier que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x > 1$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) Montrer que le point I(2,0) est un point d'inflexion de la courbe (C).

3) a) Résoudre dans IR l'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $\ln(x-1) > 1$

b) En déduire la position de relative de la courbe (C) et la droite D : $y = x$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation géométrique.

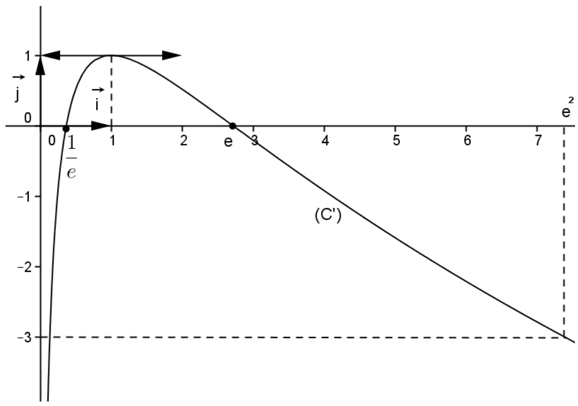
5) Tracer la courbe (C) et la droite D.

EXERCICE 11 :

Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x)= -x(a + b\ln x)^2$ où a et b sont deux réels tels que $a > 0$ et $b > 0$.

On admet que $f(\frac{1}{e})= -\frac{4}{e}$ et $f(e)= 0$



1) a) En utilisant l'égalité : $x\ln^2 x = \left(\sqrt{x}\,\ln x\right)^2$ pour tout $x > 0$, calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2) A l'aide du graphique dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Par une lecture graphique :

a) Déterminer $f'(1)$ et $f''(1)$.

b) Montrer que le point A(1,-1) est un point d'inflexion de (C) (la courbe de f selon le repère $(O, \vec{i},\vec{j})$.

4) En se servant des valeurs de $f(\frac{1}{e})$ et $f(e)$, montrer que : $a = 1$ et $b = -1$.

5) On note f^{-1} la fonction réciproque de f sur $]e,+\infty[$.

a) Calculer $f(e^2)$

b) Montrer que f^{-1} est dérivable en $(-e^2)$ et calculer $(f^{-1})'(-e^2)$