EXERCICE 1:

On dispose de deux sacs S_1 et S_2 et d'un dé cubique parfait. Le sac S_1 contient trois jetons blancs numérotés 0,0,1 et trois jetons noirs numérotés 0,2,2. Le sac S_2 contient deux jetons blancs numérotés 0,1 et quatre jetons noirs numérotés 0,0,0,1. Les faces du dé sont numérotées 1,1,2,2,2,2.

1) On lance le dé une fois.
   - Si le numéro 1 apparait, on tire simultanément deux jetons du sac S_1.
   - Si le numéro 2 apparait, on tire successivement et sans remise trois jetons du sac S_2.

■ Soit les événements : A : « Parmi les jetons tirés, on obtient le jeton noir numéro 1 »
B : « Les jetons tirés sont noirs »

1) Calculer p(B) et montrer que $p(A)=\frac{1}{3}$
2) Les jetons tirés sont noirs. Calculer la probabilité qu'ils proviennent du sac S_1.
3) Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve associe la somme des numéros marqués.
   a) Donner les valeurs prises par X.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 2.
   c) Calculer la probabilité d'obtenir une somme supérieure ou égale à 1
4) On répète l'épreuve 5 fois de suite, en remettant à chaque fois les jetons tirés dans le sac correspondant.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir au cours de ces répétions deux tirages noirs.
   b) Déterminer la moyenne et l'écart-type de la distribution des tirages noirs

.

EXERCICE 2:

I/ Soit f la fonction définie par : $f(x)=e^{-x}+x-1$

1) Etablir le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.
2) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $0 \le 1-e^{-x} \le x$

II/ soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1-\frac{1}{e} \\ u_{n+1} = 1-\sqrt{1-u_n} \quad \forall\, n \in IN \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 < u_n < 1$
   b) Montrer que (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite L.
2) Soit la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \ln(1-u_n)$.
   a) Montrer que (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
   b) Exprimer v_n en fonction de n et déduire que pour tout n de IN : $u_n = 1-e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$
   c) En utilisant le résultat de la question I/2) Montrer que pour tout n de IN :

   $0 \le u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 3:

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etablir le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR et que $\alpha \in]-2,-1[$

2) Montrer que le point I(0,1) est un centre de symétrie de (C).

3) a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$

b) En déduire que la droite D : $y = x + 2$ est une asymptote è (C) au V($-\infty$).

4) Tracer la courbe (C).

5) Soit λ un réel strictement positif et la droite Δ : $y = x$ la deuxième asymptote à (C). On désigne par $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$. Calculer $\mathcal{A}_\lambda$ en fonction de λ. En déduire $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_\lambda$

6) Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = ln(1 + 2\,e^{u_n})$

a) Montrer que pour tout n∈IN, $u_n \geq 0$.

b) Soit $v_n = \frac{2}{1+e^{u_n}}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Calculer v_n puis u_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n}$

EXERCICE 4:

On pose $u_0 = \int_0^1 e^{-2x} dx$ et $u_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$ pour tout $n \in IN^*$.

1) Calculer u_0 et u_1.

2) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que :

$2u_{n+1} = (n+1)u_n - e^{-2}$ pour tout $n \in IN^*$. En déduire que $u_2 = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$.

b) On pose $= \int_0^1 (5x^2 + x - 3)e^{-2x} dx$. Calculer K.

3) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0\ \forall\, n \in IN^*$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $\frac{x^n}{e^2} \leq x^n e^{-2x} \leq x^n$

b) En déduire que pour tout $\in IN^*$ on a : $\frac{1}{e^2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 5:

On pose pour tout $n \in$ IN*, $u_n = \int_1^e ln^n x\, dx$

1) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0$ pour tout n∈ IN

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n∈ IN

$u_{n+1} = e - (n+1)u_n$

b) En tenant compte de la question 1) a), montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+2}$

c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) Montrer que $u_1 = -1 + \frac{2}{e}$. En déduire u_2 et u_3.

4) Soit la fonction $f : x \longmapsto (\ln x)^{2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $(O,\vec{i})$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

EXERCICE 6: (Bac technique 2012)

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\infty$

Le tableau de variation ci-contre est celui de la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = 2 - x + \ln x$.

1) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1,+\infty[$ une unique solution notée α et que $\ln\alpha = \alpha - 2$.
b) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

2) Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n) \end{cases}$
a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $1 \leq u_n \leq \alpha$.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est croissante.
c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 7:

Soit la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}\ln(1 + e^{x})$ et $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx$ pour tout $\alpha > 0$
1) Montrer que $I_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha > 0$.
2) a) Montrer que $f'(x) + f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$
b) En déduire I_α en fonction de α. Calculer alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha$

EXERCICE 8: (QCM)

1) La valeur moyenne de la fonction $f : x \longmapsto e^x$ sur l'intervalle $[0, \ln 2]$ est égale à :
a) 2 **b)** $\ln 2$ **c)** $\frac{1}{\ln 2}$

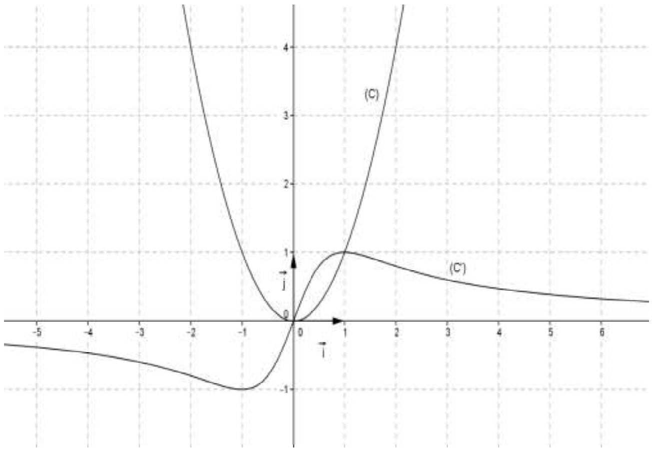
2) Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n = \frac{(-1)^n . \sin(n)}{n}$ alors :
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

3) Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n} - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n}$ alors :
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4) La suite (I_n) définie sur IN par : $I_n = \int_0^n \sqrt{x}\, e^x dx$ est une suite :
a) croissante **b)** décroissante **c)** stationnaire

EXERCICE 9:

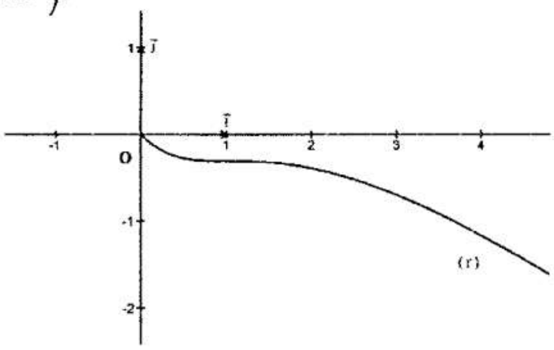
Dans le graphique ci-contre (C) et (C') sont les courbes représentatives respectivement des fonctions $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto \frac{2x}{x^2+1}$



1) Calculer en (u.a) l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.
2) Calculer en (u.a) l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

EXERCICE 10: (Bac techniques 2016)

1) La courbe (Γ) ci-contre, est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$ de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$.



(Γ) coupe l'axe des abscisses uniquement en O.

Par une lecture graphique, justifier que :

pour tout réel $x \in [0,+\infty[$ on a : $\ln(1+x^2) \leq x$.

2) On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+U_n^2) \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n > 0$.

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$.

c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d- Déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

3) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$.

a- Montrer que la suite (S_n) est strictement croissante.

b-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n \leq 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c- Déduire que la suite (S_n) est convergente.

EXERCICE 11:

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN* par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*\backslash\{1\}$, on a : $0 \leq u_n \leq 2$
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite L.
2) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$
   b) En déduire que : pour tout $n \in IN^*$, on a : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.
   c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 12:

Une entreprise fabrique des chemises en très grande série. Une chemise peut présenter deux types de défauts :

⁕ Un défaut de finition avec une probabilité de 0,03.
⁕ Un défaut de couleur avec une probabilité de 0,02.

■ La probabilité qu'une chemise ait les deux défauts à la fois est de 0,01.

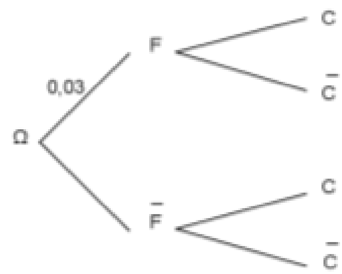
On considère les événements :

F : « La chemise présente un défaut de finition »

C : « La chemise présente un défaut de couleur »

A : « La chemise ne présente aucun défaut »

On peut modéliser ces données par l'arbre de probabilités ci-contre :



I/ 1) a) Donner la valeur de $p(C \cap F)$.
   b) En déduire que $p\left(C \cap \overline{F}\right) = 0{,}01$
2) a) On sait que la chemise présente un défaut de finition. Montrer que la probabilité qu'elle ait un défaut de couleur est égale à $\frac{1}{3}$.
   b) En déduire la probabilité que la chemise ait seulement un défaut de finition.
3) Montrer que la probabilité que la chemise ait un unique défaut est de 0,03.
4) Montrer que $p(A) = 0{,}96$
5) On considère un lot de 10 chemises emballées de cette entreprise. Un contrôle s'effectue sur l'état de chaque article de ce lot de façon indépendante. Soit X le nombre de chemises dans ce lot n'ayant aucun défaut. Calculer la probabilité (arrondi à 10^{-2} près) que 9 chemises de ce lot ne présentent aucun défaut.

II/ Une chemise (de cette entreprise) sans défaut est vendue à 40 DT. Son prix décroit à 30 DT si elle présente un seul défaut. Elle sera vendue à 20 DT si elle présente les deux défauts. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque chemise associe son prix de vente.

1) Déterminer la loi de probabilité de Y.
2) Calculer le prix moyen d'une chemise.

