SERIE D'EXERCICES N°20
Calcul d'intégrales – Les suites réelles

EXERCICE 1:

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} \end{cases}$

I/ 1) Montrer que pour tout n∈IN, on a : $0 \le u_n \le 1$.

2) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n}$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite L.

II/ On pose pour tout n∈IN, $v_n = \frac{2}{u_n} - 2$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) En se servant de la suite (v_n), calculer en fonction de n la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{u_k}$

EXERCICE 2 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+{u_n}^2}$

1) a) Montrer que pour tout n∈IN on a : $\frac{1}{2} \le u_n < 1$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n). En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Montrer que pour tout n∈IN on a : $0 < 1 - u_{n+1} \le \frac{2}{5}(1 - u_n)$

b) A l'aide de raisonnement par récurrence, déduire que pour tout n∈IN, on a :

$0 < 1 - u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 3 :

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1) Montrer que suite (u_n) est croissante

2) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $u_n \ge \frac{n}{\sqrt{n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 4 :

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN* par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*\backslash\{1\}$, on a : $0 \le u_n \le 2$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite L.

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $|u_{n+1} - 2| \le \frac{1}{2}|u_n - 2|$

b) En déduire que : pour tout $n \in IN^*$, on a : $|u_n - 2| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 5 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in$IN on a : $1 < u_n < 2$

   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c) En déduire que (u_n) est convergente vers une limite que l'on déterminera.

2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur IN par : $V_n = \ln(u_n - 1)$

   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ .Préciser son premier terme.

   b) Exprimer u_n à l'aide de n. Puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 6 :

On donne le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+3)$.

x	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

1) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $]1;2[$. (Sachant que : $\ln 4 \simeq 1{,}4$ et $\ln 5 \simeq 1{,}6$)

2) Soit la suite réelle $(\mathbf{u_n})$ définie sur IN par : $\begin{cases} \mathbf{u_0 = 1} \\ \mathbf{u_{n+1}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{u_n}) \end{cases}$

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\mathbf{1 \le u_n \le 2}$.

   b) Montrer que la suite $(\mathbf{u_n})$ est croissante. (on pourra se servir du principe de récurrence et du sens de variation de $\boldsymbol{f}$)

   c) En déduire que la suite $(\mathbf{u_n})$ est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout $x \in [1;2]$, on a : $|f'(x)| \le \frac{1}{4}$

   b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in$ IN on a : $|\mathbf{u_{n+1}} - \alpha| \le \frac{1}{4}|\mathbf{u_n} - \alpha|$

   c) En déduire que pour tout $n \in$ IN on a : $|\mathbf{u_n} - \alpha| \le (\frac{1}{4})^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u_n}$

EXERCICE 7 : (QCM)

Cocher l'unique réponse exacte :

1) Soit la suite (u_n) définie sur IN*par : $u_n = \frac{(-1)^n . \sin(n)}{n}$ alors :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$ **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ **c)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ n'existe pas

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \dfrac{\sqrt{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n} - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n}$ alors :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ **c)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

3) La suite (I_n) définie sur IN par : $I_n = \int_0^n \sqrt{x}\, e^x dx$ est une suite :

a) croissante **b)** décroissante **c)** stationnaire

EXERCICE 8:

1) Vérifier que pour tout réel non nul x, on a : $\frac{e^x}{e^x-1} = 1+\frac{1}{e^x-1}$

2) a) Calculer l'intégrale I= $\int_{ln2}^{ln3} \frac{e^t}{e^t-1}dt$

   b) Calculer alors, l'intégrale J= $\int_{ln2}^{ln3} \frac{1}{e^t-1}dt$

3) Soit l'intégrale K= $\int_{ln2}^{ln3} \frac{e^{2t}}{e^t-1}dt$.

   Calculer l'intégrale K−I. En déduire la valeur de K.

EXERCICE 9:

1) Calculer (au moyen d'intégration par parties) chacune des intégrales suivantes :

$\int_0^1 (x-1)e^x dx$; $\int_1^2 x.lnx\, dx$; $\int_1^2 x(lnx)^2 dx$

2) a) Calculer I= $\int_{\frac{1}{e}}^{e} lnx\, dx$. En déduire la valeur de l'intégrale J= $\int_1^e (lnx)^2 dx$

   b) Calculer K= $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |lnx|\, dx$ (utiliser la relation de Chasles)

EXERCICE 10:

1) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{12x+6}{(x+2)^2}$

   a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2}$ pour tout $x \in IR \setminus \{-2\}$

   b) Calculer alors $\int_0^1 f(x).dx$

2) Calculer chacune des intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{t+1}{t+2}dt$ et $\int_2^3 \frac{2t-1}{3t+1}dt$

EXERCICE 11:

On considère la fonction f : t $\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et l'intégrale I = $\int_1^e f(t)dt$

1) a) Montrer que pour tout $t > 0$, on a : $0 \le f(t) \le \frac{1}{t}$

   b) En déduire que $0 \le \text{I} \le 1$

2) a) Montrer que f est décroissante sur IR_+.

   b) En déduire que $\frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \le f(t) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\forall\ t \in [1,e]$.

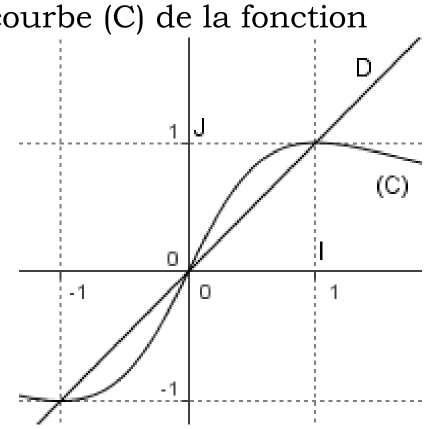
   c) Donner alors un encadrement de l'intégrale I.

EXERCICE 12:

Dans le graphique ci-contre on a représenté une partie de la courbe (C) de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ et on a tracé la droite D : $y = x$ selon un repère orthonormé (O,I,J). (unité graphique : 2cm)

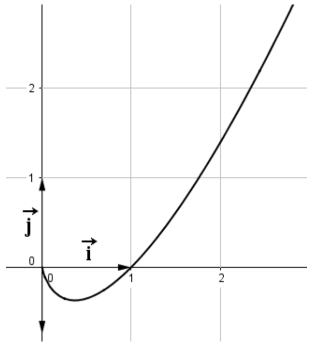
1) Calculer en unité d'aire (u.a) puis en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par (C), les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ et la droite d'équation $y = 1$.

2) Calculer en unité d'aire (u.a) puis en cm^2, l'aire $\mathcal{A}'$ de la région du plan limitée par la courbe (C), la droite D et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.



EXERCICE 13:

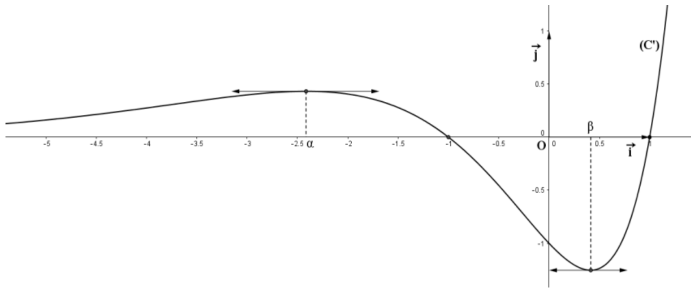
Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x.\ln x & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe selon un repère orthonormé (O, $\vec{i}\vec{j}$), (voir la figure ci-contre).



1) Calculer en unité d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par la courbe (C), l'axe (O, $\vec{i}$) et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = 2$
2) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
   $\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{1+2e^3}{9}$
   b) Calculer le volume V (en unité de volume) du solide engendré par la rotation autour de (O, $\vec{i}$) de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe (O, $\vec{i}$) et les droites d'équations : $x = 1\ et\ x = e$

EXERCICE 14:

Dans la figure ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé (O,$\vec{i}\vec{j}$) la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur IR par $f(x)= (x-1)^2.e^x$.



La courbe (C') admet une asymptote d'équation : y =0 au voisinage de $(-\infty)$ et une branche parabolique au voisinage de $(+\infty)$ de direction celle de l'axe (O$\vec{j}$).

I/ <u>Par une lecture graphique :</u>

1) Dresser le tableau de variation de f (les limites et les images doivent être calculées)
2) Montrer que la courbe (C) de f admet deux points d'inflexion qu'on notera A et B.

II/ 1) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in$ IR.
3) Vérifier que : $f(x) - f'(x) = (2-2x).e^x$. En déduire la position de (C) par rapport à (C').
4) Tracer la courbe (C) dans le même repère (O,$\vec{i}\vec{j}$). (On prend $\alpha = -1-\sqrt{2}$ et $\beta = -1+\sqrt{2}$)
5) On note pour tout $\lambda \leq 0, \mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.
   a) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que : $\mathcal{A}(\lambda) = (2\lambda - 4)e^{\lambda} + 2e$
   b) Calculer $\lim_{\lambda\to-\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

EXERCICE 15:

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 .
2) Etablir pour tout $n \in IN^*$ la relation : $2.I_n = e^2 - n.I_{n-1}$. Calculer alors I_2 .
3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
4) a) En remarquant que : $x.(\ln x)^n = x^2 \frac{(\ln x)^n}{x}$, montrer que $\forall\ x \in [1 e\ ]$, on a :
   $\frac{(\ln x)^n}{x} \leq x(\ln x)^n \leq e^2 \frac{(\ln x)^n}{x}$
   b) En déduire que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} I_n$