LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « $4^{\text{éme}}$ Sc. Techniques »	SERIE D'EXERCICES N°1 *Les fonctions exponentielles*

EXERCICE 1:

1) Ecrire chacune des expressions suivantes sous forme d'une seule exponentielle :

a) $e^{2x+1}\times e^{-x+2}$ b) $\left(\frac{e^{x-3}\times e^{2-x}}{e^{1-x}}\right)^2$ c) $(e^{2x-1})^3\times e^{4-6x}\times e$

2) Développer chacune des expressions suivantes :

$A=e^{-x}(3e^{2x}-e^{x}+xe^{-x})$ et $B=(e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})$

EXERCICE 2:

Pour chacune des propositions suivantes une seule réponse est correcte, préciser la :

1) Le réel $e^{-\ln\left(\frac{1}{e}\right)}$ est égal à :

a) $\frac{1}{e}$ **b)** e **c)** 1

2) Le réel $(e^3)^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ est égal à :

a) $\frac{1}{27}$ **b)** 1 **c)** e

3) Le réel $2e^{(x+\ln x)}$ est égal à :

a) $2xe^{x}$ **b)** $2e^{x}+2x$ **c)** $2x^2$

4) Le réel $e^{(x-2\ln x)}$ est égal à :

a) $e^{x}-2x$ **b)** $\frac{e^{x}}{x^2}$ **c)** $e^{x}-e^{\ln x^2}$

EXERCICE 3:

1) Résoudre dans IR les équations et les inéquations suivantes:

a) $e^{x+2}=1$ d) $e^{x+3}\leq e^{1-3x}$

b) $2e^{3x-1}-1=0$ e) $4e^{3x-1}-4>0$

c) $3e^{2x}+e^{x}-2=0$ f) $e^{-x}(1-3e^{x})\geq 0$

EXERCICE 4:

Calculer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+3e^{x}+1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}-x^2)$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2+x}}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+e^{-3x})e^{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{4x}-3e^{x}+x^2)$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-e^{\frac{1}{x}})$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$;	$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$;	$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^r}=+\infty$;	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^re^{x}=0\ \forall r\in\mathbb{Q}_+^*$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$	

EXERCICE 5:

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. (C) est sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f puis étudier les branches infinies de(C).
2) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A(0,1).
3) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = (x+1)e^{-x} - 1$
   a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in$ IR
4) Etudier la position de (C) par rapport à (T) puis les tracer.

EXERCICE 6:

Soit La fonction définie sur IR\{0} par : $f(\text{x}) = ln\,(1 + e^{\frac{1}{x}})$

1) Montrer que f est dérivable sur IR\{0} et que : $f'(\text{x}) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+e^{\frac{1}{x}})}$
2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\ln 2,+\infty[$
   b) Montrer que $\text{f}^{-1}(x) = \frac{1}{ln\,(e^x-1)}$ $\forall$ x $\in\ ]\ln 2,+\infty[$.

EXERCICE 7:

Déterminer une primitive F de f sur I dans chacun des cas suivants :

a) $f : \longmapsto \text{e}^{2\text{x}+1} + 2\text{e}^{-\text{x}}$; I=IR

b) $f : \longmapsto \frac{\text{e}^{(\frac{1}{\text{x}})}}{\text{x}^2}$; I= IR*

c) $f : \longmapsto \frac{\text{e}^{\text{x}}-\text{e}^{-\text{x}}}{\text{e}^{\text{x}}+\text{e}^{-\text{x}}}$; I=IR

d) $f : \longmapsto \frac{\text{e}^{2\text{x}}}{\text{e}^{\text{x}}+1}$; I=IR

EXERCICE 8:

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (On prend comme unité graphique 1cm)

1) Etablir le tableau de variation de f.
2) a) Montrer que le point I(0,2) est un centre de symétrie de (C).
   b) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point I.
3) Tracer (C) et T
4) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle K que l'on précisera.
   b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$K.
   c) Tracer dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe (C') de f^{-1}.

EXERCICES A LA MAISON

EXERCICE 1:

A/ Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 2e^x - x - 2$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction g.
2) a) Montrer que l'équation g(x)= 0 admet dans IR exactement deux solutions 0 et α.
   Vérifier que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$
   b) Dresser alors le tableau de signe de g(x).

B/ On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
   b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = e^x . g(x)$
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation géométrique.
3) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$
4) Tracer la courbe (Γ). (On prendra $f(\alpha) \approx 0{,}2$)

EXERCICE 2:

Dans le graphique ci-après, sont représentées deux courbes (C) et (Γ) .L'une représente une fonction f dérivable sur IR et l'autre représente la fonction f' dérivée de f sur IR.

La courbe (C) passe par les points A et B d'abscisses respectives α et β et admet en ces points deux tangentes horizontales.

La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses α et β et passe par le point $C(0,-1)$.

1. a) Identifier les deux courbes à l'aide des données graphiques.
   b) Tracer les tangentes horizontales à la courbe de f.

2. On admet que $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$.
   a) Ecrire $f'(x)$ à l'aide de a et b.
   b) En utilisant les valeurs graphiques de $f(0)$ et $f'(0)$, montrer que $a = -1$ et $b = 0$.
   c) Déterminer les valeurs exactes de α et β .

3. Montrer que le point O est un point d'inflexion pour la courbe (C).