DEVOIR DE CONTROLE N^{O}3 DE MATHEMATIQUES 4M 2016-2017

EXERCICE N^{O} 1(8 points)

1)Soit l'équation différentielle (E) : $(1 + e^{2x})y' - y = 0$ .On pose : $z = \sqrt{1+e^{2x}}\,.y$

a)Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation (E'): $z' - z = 0$

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ et $\varphi(x) = f(x) - x$.

a) Vérifier que f est une solution de (E) et étudier ses variations.

c)Montrer que (ξ_f) admet un point d'inflexion qu'on déterminera puis la tracer .

3)a)Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à préciser.

b)Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4)Montrer que : $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]ln2; 1[$.

5) a) Calculer $I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) dx$;(En remarquant que : $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-X} + \frac{1}{1+x}$ et à l'aide d'une intégration par parties).

b) En déduire l'aire K entre les courbes de f et f^{-1}et les axes du repère.

6) Soit la suite (u_n)définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a)Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n < \alpha$.

b)Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

c)Soit $V_n = \frac{1}{\alpha - u_n}\int_{u_n}^{\alpha} f(x)dx$ .Montrer que : $u_{n+1} \leq V_n \leq \alpha$ et en déduire sa limite.

7) Soit F la fonction définie sur $]-1;1[$ par : $\begin{cases} F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt \\ F(0) = -ln(1+\sqrt{2}) \end{cases}$

a) Montrer que F est paire et qu'elle est dérivable sur $]0;1[$ et calculer F'(x).

b)Calculer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$et déduire l'expression de F(x) pour tout x $\in]0;1[$.

c)F est elle continue en 0 ?Est elle dérivable en 0 ?

d)Calculer $F(\alpha)$ et retrouver l'aire K et tracer la courbe de F.

EXERCICE N^{O} 2(4 points)

Soit la fonction g définie sur $[0;2]$ par : $g(x) = 2.\sqrt{2x - x^2}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{I};\vec{J})$.

1)Soit (C') la courbe symétrique de (C) par rapport à $(O;\vec{I})$et $\Gamma = C \cup C'$.

a)Montrer que Γ a pour équation $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

b)Donner une équation de la tangente à Γ au point A(1 ; 0).

c)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de Γ et la tracer.

2)Soit pour tout $x \in [0;\pi]$, $G(x) = \int_0^{1+cos(x)} g(t)dt$.

Montrer que G est dérivable sur $[0;\pi]$ et que $G'(x) = -2sin^2(x)$.

3) a)Calculer $G(\pi)$ et en déduire l'expression de $G(x)$ pour tout $x \in [0;\pi]$.

b)En déduire l'aire de l'intérieur de Γ.

EXERCICE N^{O} 3(4 points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : 7x - 3y = 1 . (E)

b)Montrer que si le couple (x ; y) est solution de l'équation (E) alors $x \wedge y = 1$.

2) Soit a et b deux entiers relatifs vérifiant la relation (E') : 7a - 3b = 29.

a)Soit D = $a \wedge b$.Montrer que : D = 1 ou D= 29 .

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : 7a – 3b = 29 dans le cas ou D = 29.

c) Soit M = $\vee\ b$. Résoudre l'équation 7a – 3b = 29 dans le cas ou D = 29 et M = 1044.

3) Résoudre l'équation 7a – 3b = 29 sachant que a et b sont premiers entre eux.

EXERCICE N^{O} 4 (4 points)

L'espace (ξ)étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$,on considère les points A(2 ;0 ;0) ,B(1 ;1 ;0)et C(3 ;2 ;6).

1)Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2)a)Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F(2 ;4 ;4) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b)Montrer que Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

c)En déduire les coordonnées de H projeté orthogonal de F sur (ABC).

d)Calculer le volume du tétraèdre FABC.

3)Donner une équation de la sphère S de centre F et tangente à (ABC).

4)Soit S' l'image de la sphère S par l'homothétie h de centre A et de rapport k = -3.

Montrer que S' et (ABC)sont tangents.