Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 3** Mathématiques	Niveau : 4 ème Math
Date : 01 / 04 / 2017	Profs : SAIDI . A & MEDDEB . T	Durée : 2 heures

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (9 pts)

Soit f_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x)=\dfrac{e^x}{x^n}$, où $n\in IN^*$.

On désigne par C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[$, $f_n'(x)=\dfrac{e^x(x-n)}{x^{n+1}}$.

   $b/$ Etablir le tableau de variations de f_n.

2) $a/$ Vérifier que, pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$, $f_n(x)-n\,f_{n+1}(x)=f_n'(x)$. (⁎)

   $b/$ Etudier les positions relatives des courbes C_1 et C_2.

   $c/$ Tracer C_1 et C_2.

   $d/$ Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan délimité par C_1, C_2 et les droites d'équations : $x=1$ et $x=2$.

3) Pour tout $n\in IN^*$, on pose : $I_n=\int_1^2 f_n(x)\,dx$.

   $a/$ Montrer que, pour tout $n>1$, on a : $\dfrac{e}{n-1}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\leq I_n\leq\dfrac{e^2}{n-1}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$.

   $b/$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) $a/$ En utilisant la relation (⁎) établie dans la deuxième question, montrer que :

   pour tout $n\in IN^*$, $I_n-nI_{n+1}=\dfrac{e^2}{2^n}-e$.

   $b/$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_{n+1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

5) $a/$ Montrer que, pour tout $n\geq 2$, on a : $f_n(2)<2$.

   $b/$ En déduire que, pour tout $n\geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n\in\,]1\,;2[$ tel que $f_n(\alpha_n)=2$.

6) $a/$ Vérifier que, pour tout $n\geq 2$ et pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$, $f_n(x)=x\,f_{n+1}(x)$.

   $b/$ En déduire que, pour tout $n\geq 2$, $f_n(\alpha_{n+1})=2\alpha_{n+1}$ puis que $\alpha_{n+1}<\alpha_n$.

   $c/$ Montrer que, pour tout $n\geq 2$, on a : $\alpha_n=e^{\frac{\alpha_n-\ln 2}{n}}$, en déduire que $1<\alpha_n<e^{\frac{2}{n}}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

Exercice n°2 : (5 pts)

1) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $7^{4n} - 1$ est divisible par 5.

$b/$ Déterminer, pour tout entier $n \in \{0;1;2;3;4\}$, le reste modulo 5 de 7^n.

$c/$ En déduire que l'entier $2 \times 7^{2017} + 49^{2016}$ est divisible par 5.

2) $a/$ Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier q, on a :

$$q^{n+1} - 1 = (q-1)(1 + q + ... + q^n).$$

$b/$ On pose, pour tout $n \in IN$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} 7^k$. Montrer que S_n divise $7^{n+1} - 1$.

3) $a/$ Déterminer, pour tout $n \in IN$, le chiffre des unités de 7^{4n+1}.

$b/$ Soit x un entier, montrer l'équivalence :

$6x \equiv 6 \pmod{10}$ si, et seulement si, $x \equiv 1 \pmod{10}$ ou $x \equiv 6 \pmod{10}$.

$c/$ Montrer que S_{100} est un entier impair.

$d/$ En déduire le chiffre des unités de S_{100}.

Exercice n°3 : (6 pts)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{BG}$.

$b/$ En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BEG) est : $x - y + z - 1 = 0$.

2) $a/$ Vérifier que la droite (DF) est perpendiculaire au plan (BEG).

$b/$ Déterminer les coordonnées du point K intersection de (DF) et (BEG).

3) Pour tout réel m. On considère l'ensemble S_m des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(1-m)y - 2mz + 2m - \frac{1}{3} = 0.$$

$a/$ Montrer que, pour tout $m \neq \frac{2}{3}$, S_m est la sphère de centre $I_m(m\,;1-m\,;m)$ et de rayon $R_m = \sqrt{3}\left|m - \frac{2}{3}\right|$.

$b/$ Montrer que, lorsque m décrit $IR \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, I_m varie sur la droite (DF) privée du point K.

$c/$ Montrer que S_m est tangente au plan (BEG) et préciser le point de tangence.

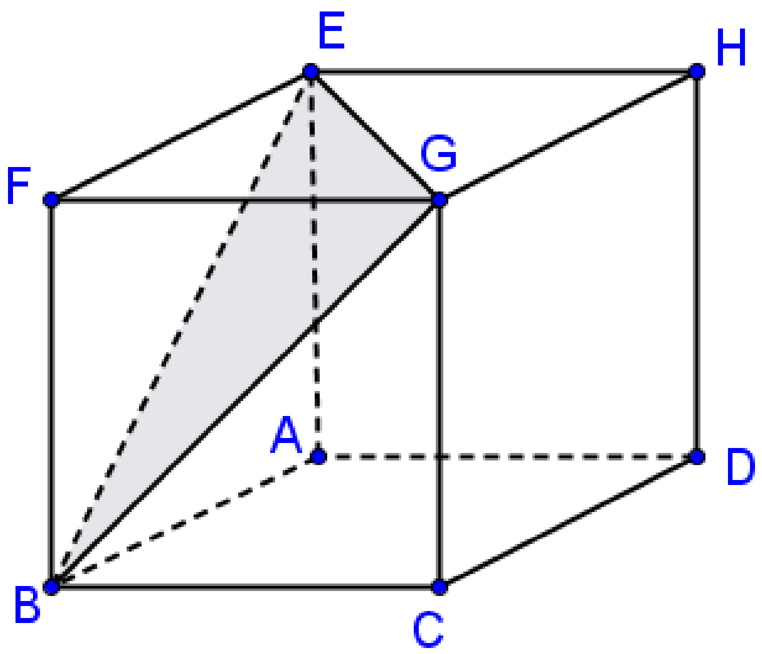
4) Soit P le plan passant par A et parallèle à (BEG).

Déterminer la valeur de m pour que S_m coupe P suivant un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1.

5) Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $-\frac{1}{2}$.

$a/$ Montrer que S_1 est l'image de S_0 par h.

$b/$ Soit P' l'image du plan P par h, montrer que P' et S_1 sont sécants suivant un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le rayon.



Bonne chance