Exercice1

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$.

Exercice2

Soient la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3+5x^2-4x-7}{(x+2)^2}$

1°) Trouver les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$

2°) Trouver la primitive F de f prenant la valeur $-\frac{5}{2}$ en 0.

3°) En déduire $I = \int_2^3 f(x)\, dx$.

Exercice3

1°) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin^2 x\, dx$

a) Calculer I + J puis I – J

b) En déduire les valeurs de I et de J.

2°) Déterminer les réels a ; b et c tels que pour tout réel strictement positif x on ait : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

3°) Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)} dx$; en déduire en utilisant l'intégration par partie le calcul de $J = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(x)}{x(x^2+1)} dx$

4°) Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

a) Calculer I_0

b) Pour tout entier naturel n, en utilisant une intégration par parties,

c) Calculer I_{n+1} en fonction de I_n. En déduire I_4.

Exercice4

On se propose de trouver sans les calculer séparément les trois intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\ dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\ dx \ ; \ K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x \cos^2 x\ dx$$

1°) Calculer $I - J$ et $I + J + K$.

2°) Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

En déduire la valeur de $I + J - 3K$ puis celles de I ; J ; K.

Bouzouraa Chaouki

www.devoirat.net 2017

Exercice5

Pour tout entier naturel n >0 ; on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3+x}\, dx \quad et \quad I_0 = \int_0^1 \sqrt{3+x}\, dx$

1°) a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

2°) Comparer x^{n+1} et x^n lorsque $0 \leq x \leq 1$. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3°) a) En procédant par encadrement, établir que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

b) Etudier la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.

4°) a) Démontrer que, pour tout nombre x de [0 ; 1] on a :

$$0 \leq 2-\sqrt{x+3} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x)$$

b) Déduisez du résultat précédent que : $\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

c) Déterminer la limite de la suite $(n I_n)$.

Exercice 6

Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x\, dx$. (on indique que $\sin^n x = \sin^{n-1} x \times \sin x$)

1°) Calculer I_0 et I_1.

2°) Sans calculer I_n, démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

3°) A l'aide d'une intégration par parties de I_n démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

4°) a) Calculer I_9 ; I_{10} et I_{11}

b) En déduire que : $\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 5 \times 7^2}$.

Exercice 7

On considère les intégrales définies $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x\, dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$.

1°) a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire : $I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x)\, dx$

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx - \frac{1}{3} J$.

c) Montrer aussi que l'intégrale J peut s'écrire : $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx - \frac{1}{3} I$.

2°) a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

b) Montrer que $J - I = 0$

c) En déduire les valeurs des intégrales I et J.

Bouzouraa Chaouki