

Lycée Tahar Sfar Mahdia	Devoir de contrôle n° 2 Mathématiques	Niveau : 4 ^{ème} Math
Date : 18 / 02 / 2017	Profs : SAIDI . A & MEDDEB . T	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a/ Montrer que f est dérivable sur $[0 ; 1[$ et que $f'(x) = \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

b/ Montrer que f est une bijection de $[0 ; 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par C' la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

c/ Tracer C et C' . On précisera $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

a/ Montrer que F est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $F'(x)$.

b/ En déduire que $F(x) = x$, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$.

3) Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $I_n = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

a/ Calculer I_0 .

b/ Etudier le sens de variation de la suite (I_n) .

c/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

4) a/ Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (2n+1) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^{2n} \sqrt{1-x^2} dx.$$

b/ En déduire que : $(2n+2)I_{n+1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (2n+1)I_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c/ Calculer I_1 .

5) a/ Calculer l'aire \mathcal{A} de la région du plan limitée par les courbes C , C' et les droites

d'équations : $x=0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b/ En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x) dx$.

Exercice n°2 : (6 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit (\mathcal{P}) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que : $y^2 + 4x = 0$.

1) a/ Montrer que (\mathcal{P}) est une parabole et préciser ses éléments caractéristiques.

b/ Tracer (\mathcal{P}) .

2) Pour tout réel $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, on considère le point $M_\theta \left(-1 - \tan^2 \theta; \frac{2}{\cos \theta} \right)$.

a/ Vérifier que $M_\theta \in (\mathcal{P})$.

b/ Soit T la tangente à (\mathcal{P}) en M_θ . Montrer que T a pour équation : $y = -x \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta}$.

c/ La droite T coupe les axes (O, \vec{i}) et (O, \vec{j}) respectivement en P et N .

Déterminer en fonction de θ les coordonnées de P et N .

d/ Déterminer en fonction de θ l'aire \mathcal{A}_θ du triangle FPN , où F désigne le foyer de (\mathcal{P}) .

e/ Pour quelles valeurs de θ l'aire \mathcal{A}_θ est-elle minimale ?

3) On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc \widehat{OM}_0 de la courbe (\mathcal{P}) autour de l'axe (O, \vec{i}) . Calculer V .

Exercice n°3 : (6 pts)

Dans le plan orienté dans le sens direct, On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2AD$

et $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[ID]$ et $[AD]$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme B en I et I en D .

a/ Déterminer l'angle θ et le rapport k de S .

b/ Soit Ω le centre de S , montrer que $(\widehat{\Omega B}, \widehat{\Omega D}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et que $\Omega D = 2\Omega B$. Préciser alors Ω .

2) Soit S' la similitude directe de centre I qui transforme D en A .

a/ Déterminer la forme réduite de S' .

b/ Déterminer $S' \circ S(B)$ et caractériser $S' \circ S$.

3) Soit ψ la similitude indirecte qui transforme A en I et K en J .

a/ Montrer que D est le centre de ψ .

b/ Déterminer le rapport de ψ et construire son axe Δ .

c/ Soit $\varphi = S^{-1} \circ \psi$, montrer que φ est un antidéplacement que l'on caractérisera.

Bonne chance