

**Exercice n°1 :(4 points)**

$ABC$  triangle équilatéral direct. On désigne par  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[AC]$  et par  $D$  le symétrique du point  $A$  par rapport à  $C$ .

1. Soit  $f$  l'antidépacement qui transforme  $C$  en  $A$  et  $A$  en  $B$ .
  - a. Montrer que  $f$  est une symétrie glissante
  - b. Déterminer les éléments caractéristiques de  $f$
2. Soit  $g$  la similitude directe qui transforme  $B$  en  $D$  et  $I$  en  $C$ .
  - a. Déterminer une mesure de l'angle et le rapport de  $g$
  - b. Déterminer  $g(A)$
  - c. Donner la forme réduite de  $g$
3. Soit  $S = f \circ g$ 
  - a. Justifier que  $S$  est une similitude indirecte
  - b. Déterminer  $S(I)$  et  $S(A)$
  - c. Montrer que  $\Omega$  le centre de  $S$  est le barycentre des points pondérées  $(B,1)$  et  $(I,-4)$
4. Montrer que l'axe  $\Delta$  de  $S$  est la perpendiculaire à  $(AB)$  en  $\Omega$ . Construire  $\Delta$

**Exercice n°2 :(7 points)**

- A.
1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln(x) - 1$ 
    - a. Etudier les variations de la fonction  $g$  ( on ne demande pas les limites )
    - b. Dédire que  $\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}) \geq 1$  pour tout  $x > 0$

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$   $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

- a. Montrer que  $f$  est continue à droite en  $O$

b. Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0. Interpréter graphiquement

c. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

3.

a. Montrer que pour tous  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1 - \ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}))^2}$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$

c. Vérifier qu'une équation de la tangente  $(T)$  au point d'abscisse 1 est  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

d. Construire la courbe  $(C_f)$  et la tangente  $(T)$  dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

B. Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} - \ln(\sqrt{t})} dt$

1.

a. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

b. Montrer que  $F$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

c. Déterminer le signe de  $F(x)$  suivant les valeurs de  $x$

2.

a. Calculer  $\int_1^x 1 + \ln(\sqrt{t}) dt$  pour  $x \in ]0, +\infty[$

b. Montrer que  $\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} - \ln(\sqrt{t})} \leq 1 + \ln(\sqrt{t})$  pour tout  $t \in [1, +\infty[$

c. En déduire que  $F(x) \leq \frac{1}{2}(x-1) + x \ln(\sqrt{x})$  pour tout  $x \geq 1$

3.

a. Calculer  $\int_1^x 1 + \frac{\ln(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt = x + 1 - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \ln(x)$  pour  $x \in ]0, +\infty[$

b. Montrer que  $f(t) \geq 1 + \frac{\ln(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \quad \forall t \in [1, +\infty[$

c. En déduire que  $x + 1 - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \ln(x) \leq F(x)$  pour tout  $x \geq 1$

d. Déduire de ce qui précède une valeur approchée de  $F(2)$

### Exercice n°3 : (4 points)

On considère dans  $\square \times \square$  l'équation  $(E) : 2x - 3y = -1$

1.

a. Vérifier que  $(1, 1)$  est une solution de  $(E)$

b. Résoudre dans  $\square \times \square$  l'équation  $(E)$

- 2.
- Montrer que  $13x^2 + 10x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$  équivaut à  $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$
  - Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :  $13x^2 + 10x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  On considère la droite  $\Delta$  dont une équation cartésienne est " $2x - 3y + 1 = 0$ "
- Déterminer l'ensemble  $\zeta$  des points de  $\Delta$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs
- 4.
- Déterminer le sous-ensemble  $\Gamma$  des points de  $\zeta$  dont le carré de la distance au point  $O$  est un multiple de 5
  - Préciser les points de  $\Gamma$  dont les coordonnées sont strictement comprises entre  $-20$  et  $20$

### Exercice n°4 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe on a tracé dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative de la fonction  $K$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $K(x) = 1 - \frac{1}{x-1} + \ln|x-1|$

- On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $h(x) = (x-2)\ln|x-1|$ 
  - Montrer que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et que  $h'(x) = K(x)$
  - Montrer que le point  $O(0,0)$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C_h)$ . Déterminer une équation de la tangente à la courbe  $(C_h)$  au point  $O$
  - Déterminer la nature des branches infinies de  $(C_h)$
  - Construire la courbe  $(C_h)$  ainsi que la tangente au point  $O$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- Soit  $\lambda$  un réel de  $]0, 1[$ 
  - On donne  $I = \int_0^\lambda \frac{x^2}{x-1} dx$  et  $J = \int_0^\lambda \frac{x}{x-1} dx$   
 Calculer  $I$  et  $J$  (On pourra remarquer que :  $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$  et que  $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ )
  - Calculer  $A(\lambda)$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_h)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations " $x=0$ " et " $x=\lambda$ "
  - Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow 1} A(\lambda)$

