SÉRIE N°1
MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte, mettre une croix dans la bonne case.

Questions	Réponses
1. La fonction $f : x \longmapsto \left\|x^2 - 1\right\|$ est dérivable en	❒ 1 ❒ -1 ❒ 0
2. le nombre dérivé de la fonction $f : \longmapsto 2\pi\sqrt{x} - \sin(x)$ en $\frac{\pi}{2}$ est égal à	❒ $\sqrt{2}\,\pi$ ❒ $2\sqrt{\pi}$ ❒ $\sqrt{2\pi}$
3. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation : $\sin(x) = \cos(x)$ dans l'intervalle $[0, 3\pi]$. le cardinal de S est égal à	❒ 1 ❒ 2 ❒ 3
4. La limite de la fonction $f : \longmapsto \frac{1+\cos(\pi x)}{1+x}$ en -1 est égale à	❒ 0 ❒ -1 ❒ 1
5. Le réel $\cos\left(\frac{2017\pi}{6}\right)$ est égal à	❒ $\frac{1}{2}$ ❒ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ❒ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. Le domaine de définition de la fonction $f : \longmapsto 2 - \sqrt{1 - x^2}$ est égal à	❒ $[-1, 1]$ ❒ $[-1, +\infty[$ ❒ $]-\infty, 1]$

Exercice 2

On se donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2\sin^2(x) - 3\cos(x) + 3$$

1/ Déterminer les images des réels $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ par f.

2/ a) Vérifier que l'on a :

$$f(x) = (2\cos(x) - 1)(\cos(x) - 1)$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.

c) Etudier le signe de $2\cos(x) - 1$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

d) Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'inéquation $f(x) > 0$.

3/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{3x - \pi} & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{6} & \text{si } x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Montrer que g est continue en $\frac{\pi}{3}$

Exercice 3

1/ Montrer que : $\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{12}$

2/ Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que l'on a :

$$8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 = \cos(4x)$$

3/ a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $8y^4 - 8y^2 + \frac{1}{2} = 0$.

b) Montrer que $\cos\frac{\pi}{12}$ est une solution de (E).

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 4

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ l'équation : $\dfrac{\cos(2x)}{\sin\frac{\pi}{7}} = \dfrac{\sin(2x)}{\cos\frac{\pi}{7}}$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi, 2\pi]$ l'inéquation :

$$3\sqrt{3} - 6\cos(6x) > 0$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 2-x\sqrt{x} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\[2mm] \dfrac{4x^2+2x-6}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x>1\\[2mm] 3x^3+2x^2+2 & \text{si } x<0\end{cases}$$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ a) Montrer que f est dérivable en $\dfrac{1}{4}$ et que $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{3}{4}$

b) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=11$.

c) Montrer que f est dérivable en -1 et que $f'(-1)=5$.

3/ a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la continuité de f en 1.

4/ a) Montrer que f est dérivable en 0 puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 6

Calculer, s'ils existent, les limites suivantes :

1/ $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x+6}{x^3-6x+9}$ 2/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-6x^2+5x-1}{x^3+6x^2-3x+8}$ 3/ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^4-x^2}$

4/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-6}-x)$ 5/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+x}}{x}$ 6/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{-2x^2+6x+5}-3}{x-2}$

Exercice 7

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{24}$

2/ Montrer que : $\cos\dfrac{\pi}{18}\cos\dfrac{7\pi}{18}+\sin\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{7\pi}{18}=\dfrac{1}{2}$

3/ Calculer le réel : $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$