Série d'exercices : Probabilité

EXERCICE N°1:

Une urne contient 4 boules rouges, 5 boules vertes et 3 boules blanches.

On tire simultanément 2 boules de l'urne, on suppose que les tirages sont équiprobables.

1°) Quel est la probabilité d'obtenir :

a- Deux boules blanches.

b- Deux boules de couleurs différents.

2°) On inscrire sur chaque boule rouge le nombre 1, sur chaque boule verte le nombre –1 et sur chaque boule blanche le nombre 0.

On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage fait correspondre la somme de nombre inscrit sur les deux boules tirées.

a- Quel sont les valeurs prisent par X ?

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

c- Calculer l'espérance mathématique de X.

d- Calculer la variance de X.

e- Déterminer l'écart type.

EXERCICE N°2:

Une cage contient dix souris : cinq blanches (trois femelles et deux mâles), trois grises toutes femelles et deux marrons (un mâle et une femelle). Une épreuve consiste à retirer simultanément et au hasard trois souris de la cage.

1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Les trois souris retirées sont de même sexe » ;

B : « Les trois souris retirées sont de même couleur »

2) Sachant que les trois souris retirées sont femelles, Calculer la probabilité pour qu'elles soient de même couleur

3) On désigne par X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de souris blanches obtenues.

a) Etablir la loi de broyabilité de X ;

b) Calculer son espérance mathématique et sa variance.

EXERCICE N°3:

On considère une urne U_1 contenant 2 boules blanches et 3 boules rouges et une urne U_2 contenant 2 boules blanches et 2 boules rouges.

I) On tire une boule de U_1 et une boule de U_2 .

1)a) Calculer la probabilité de l'évènement suivant : A : « Obtenir deux boules de même couleur »

b) Sachant qu'on a obtenu deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité pour que la boule rouge soit tirée de U_1 .

2) Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X, Calculer $E(X)$ et $V(X)$

b) On répète l'épreuve 4 fois de suite en remettant à chaque fois la boule dans l'urne où elle est tirée. Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

F : « Obtenir au plus une fois deux boules de même couleur »

G : « Obtenir deux boules de même couleur pour la $1^{ière}$ fois à la $3^{ième}$ épreuve ».

II) On considère l'épreuve suivante : On tire une boule de U_1 , si elle est blanche on la garde et on tire une autre boule de U_1 , si elle est rouge on la met dans U_2 et on tire successivement sans remise deux boules de U_2. Soit Y la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches obtenues au cours de cette épreuve. Déterminer la loi de probabilité de Y.

à 1500 jours ?

EXERCICE N°4:

On considère les épreuves de courses de 100 m et 200 m lors des meetings internationaux d'athlétisme. On s'intéresse au nombre des faux départs survenant lors de ces épreuves. On rappelle qu'un faux départ est le démarrage d'un athlète avant le signal de départ donné par le starter à la suite de quoi on doit donner un nouveau signal de départ.

Les statistiques des données précédentes ont permis d'établir les données suivantes :

a. La probabilité qu'il y ait un faux départ au premier signal est 0.25.

b. Quand il y a un faux départ au premier signal, la probabilité qu'il y ait de nouveau un faux départ au deuxième signal est 0.08.

c. Il n'y a jamais de faux départ au troisième signal.

On notera :

i. F_1 l'évènement : « Il y a un faux départ au premier signal »

ii. F_2 l'évènement : « Il y a un faux départ au deuxième signal »

1) Représenter ces données par un arbre de probabilité.

2) Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement un faux départ.

3) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de faux départs lors d'une épreuve quelconque.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Montrer que dans 25% des épreuves il y a au moins un faux départ.

4) Lors d'un quart de finale au 100 m, on fait courir les athlètes en quatre séries indépendantes. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux séries sans faux départ au premier signal lors de ce quart de finale.

EXERCICE N°5:

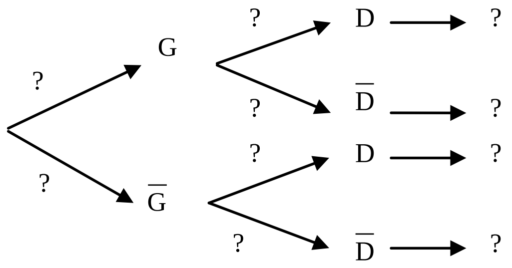
Dans un atelier de couture on sait que 20% des machines sont sous garantie. Parmi les machines sous garantie 1% sont défectueuses. Parmi les machines qui ne sont pas sous garantie 10% sont défectueuses. On considère les évènements suivants :

G : « La machines est sous garantie »

D : « La machine est défectueuse »

1) On choisit une machine au hasard.

a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre



b) Déterminer la probabilité pour que la machine soit sous garantie et défectueuse.

2) a) Déterminer la probabilité pour que la machine soit défectueuse.

b) La machine est défectueuse, calculer la probabilité pour qu'elle soit sous garantie.

3) On choisit successivement et au hasard 5 machines. Calculer la probabilité des évènements suivants : A : « Seule la deuxième machine est sous garantie »

B : « Obtenir au moins deux machines sous garantie »

4) Soit X la variable aléatoire indiquant la durée de vie d'une machine en années. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.25$. Cocher la réponse exacte :

a) La probabilité que la machine dure plus de 4 ans est : x) $1-e^{-1}$; y) e^{-1} ; z) $e^{-1}-1$

b) La probabilité que la machine dure moins de 8 ans sachant qu'elle a duré plus que 4 ans est égale

x) $1-e^{-1}$; y) e^{-1} ; z) $e^{-1}-1$

EXERCICE N°6:

Un laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de disparition d'une population animale. Le test fournit les renseignements suivants :

La population testée comporte 60% d'animaux malades.

Si un animal est malade, le test est positif dans 98% des cas.

Si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 3% des cas.

On note M l'évènement « L'animal est malade » et T l'évènement « Le test est positif »

1) a) Donner un arbre des choix associé à cette épreuve.

b) Montrer que $P(T)=0.6$; c) Calculer alors $P(M/T)$

On suppose qu'un virus responsable de cette maladie a une durée de vie X, exprimée en heures, qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.01$

2) a) Quelle est la probabilité pour que le virus persiste dans l'organisme animal plus que 4 jours.

b) Sachant que le virus a persisté plus que 4 jours, quelle est la probabilité qu'il persiste moins qu'une semaine.

c) Déterminer, en jours et a une heure prés, le temps T tel que $P(X \leq T) = P(X \geq T)$

3) a) Déterminer, en heures, la durée de vie moyenne d'un virus.

b) Déterminer et construire la fonction de répartition de X.

EXERCICE N°7:

Un quincailler achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20% au premier fournisseur, 50% au deuxième et 30% au troisième fournisseur. Le premier fournisseur fabrique 97% d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98% d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95% d'ampoules sans défaut.

1) On choisit une ampoule au hasard dans le stock.

On note : D l'événement « l'ampoule est défectueuse »

F_1 L'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur »

F_2 L'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur »

F_3 L'événement « l'ampoule provient du troisième fournisseur »

a) Montrer que $P(D) = 0.031$

b) Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne du premier fournisseur ?

2) On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité R qu'une ampoule au plus soit défectueuse.

3) La durée de vie en heures d'une ampoule, notée T, suit une loi exponentielle de paramètre : $\lambda = 2.10^{-5}$.

a) Quelle est la probabilité P_1 qu'une ampoule dure plus de 25000 heures ? Donner la valeur exacte de P_1.

b) Quelle est la probabilité P_2 qu'une ampoule dure plus de 50000 heures ? Donner la valeur exacte de P_2.

c) Quelle est la probabilité P_3 qu'une ampoule dure plus de 50000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 25000 heurs ?