Exercice 1. Simplification d'écritures

Simplifiez au maximum :

1. $\ln 8 - \ln 2$
2. $\ln 6 + \ln 3$
3. $\ln 25 - \ln 30 + \ln 10$
4. $\ln 50 + \ln 2 - \ln 10$
5. $3\ln 4 - \ln 256$
6. $2\ln 2 - \ln 16 + \ln 128$
7. $\ln \mathrm{e}^{2x}$
8. $\ln \mathrm{e}^{2x-4} - \ln \mathrm{e}^{2x+4}$
9. $\dfrac{3\ln \mathrm{e}^{x+1}}{2\ln \mathrm{e}^{1-x}}$

Exercice 2. Équations

Résoudre les équations suivantes:

1. $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$
2. $\ln(4-2x) = \ln(x-1)$
3. $\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2-2x+1)$
4. $\ln(2x^2-10x+8) = \ln(3x^2-3x-18)$
5. $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$
6. $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$

Exercice 3. Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(5x+20) > \ln(3x-9)$
2. $\ln(8-2x) \leqslant \ln(5x-25)$
3. $\ln(x^2+1) < \ln(2x^2+x+2)$
4. $\ln(2x^2-3x+1) > \ln(-5x^2+8x-3)$
5. $\ln(x^2-5x-14) \geqslant \ln(2x^2-10x+8)$
6. $\ln(x^2+x-6) > \ln(-2x^2+14x+16)$

Exercice 4. Limites

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}\ln\left(x^2+1\right).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   Indice : on pourra démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$ en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$. Cela pourra nous servir dans notre raisonnement.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Exercice 5. Limites

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x+1}}\right)$.

Exercice 6. Calculs de dérivées

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x\ln x - x$
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
3. $f_3(x) = \ln\left(x^2\right)$
4. $f_4(x) = \ln\sqrt{x+1}$
5. $f_5(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$
6. $f_6(x) = \ln(\ln x)$

■ Exercice 7. Fonction $f : x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

1 Déterminer son domaine de définition.

2 Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variation de f sur son domaine de définition.

3 Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.
Dresser un tableau de variations complet de la fonction f.

■ Exercice 8. Fonction $f : x \mapsto (x+1)\ln(x^2-2x+1)$

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)\ln\left(x^2-2x+1\right).$$

1 Donner le domaine de définition de f. On le notera $\mathscr{D}$.

2 Calculer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.

3 Calculer $f'(x)$.

4 Trouver le signe de $f'(x)$ sur $\mathscr{D}$, puis en déduire les variations de f sur $\mathscr{D}$.
Dresser un tableau de variations complet de f.

■ Exercice 9. Fonction $f : x \mapsto (x^2+1)\ln x - x$

Partie A :

On considère la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{x^2-x+1}{2x^2}.$$

1 Montrer que sa dérivée est : $h'(x) = \dfrac{2x^2+x-2}{2x^3}$.

2 Étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

3 Dresser un tableau de variation de h sur $]0\,;+\infty[$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(x^2+1\right)\ln x - x.$$

1 Calculer sa dérivée puis montrer l'équivalence suivante :

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow h(x) > 0.$$

2 En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

3
a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
b. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
c. Dresser un tableau de variation complet de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

4
a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, que l'on notera α, sur $]0\,;+\infty[$.
b. Montrer que α appartient à l'intervalle $]1\,;2[$.
c. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.