Exercice 1

1. Il s'agit d'une ellipse, l'axe focal a pour équation $y = -1$ (*il passe par le foyer et est perpendiculaire à* $\mathcal{D}$). Soient $A(x, -1)$ un sommet principal, on a $\dfrac{AF}{AH} = e$ où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

$$\frac{AF}{AH} = e \Longleftrightarrow AF^2 = \frac{1}{9}AH^2 \iff (x-1)^2 = \frac{1}{9}(x-5)^2$$

On trouve immédiatement $A'(-1, -1)$ et $A(2, -1)$. Le centre de la conique vérifier $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'})$ alors $\Omega\left(\frac{1}{2}, -1\right)$,le paramètre a vaut alors $a = \dfrac{AA'}{2} = \dfrac{3}{2}$.Puisque $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3}$,on a $c = \dfrac{1}{2}$ et enfin $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \implies b = \sqrt{2}$. Les sommets secondaires sont donc $B'\left(\frac{1}{2}, -1 + \sqrt{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}, -1 - \sqrt{2}\right)$.

L'autre foyer est $F'\left(\frac{1}{2} - c, -1\right)$, alors $F'\,(0, -1)$, l'autre directrice $D' : x = -3$.

2. On revient à la définition de la conique,

$$\frac{AF}{AH} = e \Longleftrightarrow AF^2 = \frac{1}{9}AH^2 \iff (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{9}(x-5)^2$$

l'équation de la conique est donc

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 - \frac{1}{9}(x-5)^2 = 0$$

ce qui peut s'écrire

$$8x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 7 = 0$$

Les points d'intersection avec les axes sont obtenus en faisant $x = 0$ (*intersection avec* (Oy)) et $y = 0$ (*intersection avec* (Ox)).

On obtient :

Si $x = 0$, $9y^2 + 18y - 7 = 0$ dont les solutions sont $-\frac{7}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Les points d'intersection avec (Oy) sont $P\left(0, \frac{1}{3}\right)$ et $Q\left(0, -\frac{7}{3}\right)$.

Si $y = 0$, $8x^2 - 8x - 7 = 0$ dont les solutions sont $\frac{2-3\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{2+3\sqrt{2}}{4}$. Les points d'intersection avec (Ox) sont $R\left(\frac{2+3\sqrt{2}}{4}, 0\right)$ et $S\left(\frac{2-3\sqrt{2}}{4}, 0\right)$.

La Conique

Exercice 2

1. **Premier cas** : $a - t < 0$ et $b - t < 0$ i.e. si $t > b$ alors $\mathcal{C}_t$ est vide.

Deuxième cas : Si $t \in]a, b[$ alors $a - t < 0$ et $b - t > 0$, $\mathcal{C}_t$ est une hyperbole d'axe focal (Oy) de centre O. L'équation réduite est $-\frac{x^2}{t-a} + \frac{y^2}{b-t} = 1$. Les foyers sont $F = (0, \sqrt{b-a})$ et $F' = (0, -\sqrt{b-a})$, le demi grand axe est $\sqrt{b-t}$.

Troisième cas : $t < a$ alors $a - t > 0$ et $b - t > 0$, $\mathcal{C}_t$ est une ellipse. Puisque $a - t < b - t$ l'axe focal est (Oy).

L'équation réduite est $\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} = 1$. Les foyers sont $F = (0, \sqrt{b-a})$ et $F' = (0, -\sqrt{b-a})$, le demi grand axe est $\sqrt{b-t}$.

Toutes ces coniques ont donc mêmes foyers.

2. On peut procéder géométriquement ou par le calcul.

Géométriquement : Puisque les coniques ont toutes les mêmes foyers, d'après la définition bifocale si $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_u$ passent par le même point M, elles sont de nature différente (sinon, supposons que ce soient deux ellipses, alors $MF + MF' = 2\sqrt{b-t} = 2\sqrt{b-u}$ d'où $t = u$, de même si ce sont deux hyperboles avec $MF - MF'$).

Page dáccueil
Page de Titre
Sommaire
Page 3 de 19
Retour
Full Screen
Fermer
Quitter

Si $\mathcal{C}_t$ est une ellipse et $\mathcal{C}_u$ une hyperbole, la tangente en M à $\mathcal{C}_u$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\widehat{MF, MF'}\right)$ et la tangente en M à $\mathcal{C}_t$ est la bissectrice extérieure du même angle. Ces deux tangentes sont donc perpendiculaires.

Par le calcul : Si M_0 a pour coodonnées (x_0, y_0) , un vecteur normal à $\mathcal{C}_t$ en M_0 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{a-t} \\ \dfrac{y_0}{b-t} \end{pmatrix}$ (La tangente en M_0 à $\mathcal{C}_t$ est $\dfrac{xx_0}{a-t} + \dfrac{yy_0}{b-t} = 1$, par la règle du dédoublement !!).De même, un vecteur normal à $\mathcal{C}_t$ en M_0 est $\begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{a-u} \\ \dfrac{y_0}{b-u} \end{pmatrix}$ Il s'agit de prouver que $\begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{a-t} \\ \dfrac{y_0}{b-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{a-u} \\ \dfrac{y_0}{b-u} \end{pmatrix} = \dfrac{x_0^2}{(a-t)(a-u)} + \dfrac{y_0^2}{(a-t)(a-u)} = 0.$

Or on sait que M_0 est sur $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_u$, donc

$$\frac{x_0^2}{a-t} + \frac{y_0^2}{b-t} = 1$$
$$\frac{x_0^2}{a-u} + \frac{y_0^2}{b-u} = 1$$

Par différence des deux égalités, il vient

$$\frac{x_0^2}{a-t} - \frac{x_0^2}{a-u} + \frac{y_0^2}{b-t} - \frac{y_0^2}{b-u} = 0$$
$$\text{soit } (t-u)\left(\frac{x_0^2}{(a-t)(a-u)} + \frac{y_0^2}{(a-t)(a-u)}\right) = 0$$

ce que l'on voulait démontrer (car $t \neq u$).

Exercice 3

1. On a $\Delta = 4\alpha^2 - 4 = 4\left(\alpha^2 - 1\right)$. Ainsi pour $\alpha = 1$ ou -1, $\mathcal{C}_\alpha$ deux droites parallèles, pour $|\alpha| > 1$, elle est du genre hyperbole, et pour $|\alpha| < 1$ du genre ellipse.

2. C'est le cercle unité !!

3. Pour $\alpha = 1$, l'équation devient $(x+y)^2 = 1$ ce qui donne deux droites $y = 1 - x$ et $y = -1 - x$. Pour $\alpha = -1$, on a $(y - x) = \pm 1$ soit $y = x + 1$ ou $y = x - 1$.

4. On a $\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$, le terme en XY est donc égal à

Page dáccueil
Page de Titre
Sommaire
Retour
Full Screen
Fermer
Quitter

$$-2\cos\theta\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+2\alpha\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=2\alpha\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$$

On choisit donc $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ pour avoir un terme en XY nul. Les formules de changement de repère deviennet alors $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$ et l'équation de $\mathcal{C}_\alpha$ est

$$\frac{1}{2}(X-Y)^2+\frac{1}{2}(X+Y)^2+2\alpha\times\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)-1=0$$

soit

$$(1+\alpha)X^2+(1-\alpha)Y^2=1$$

5. Pour $a=\dfrac{1}{2}$, on a $1-\alpha>0$, l'équation ressemble à une équation réduite d'ellipse

$$\frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2=1\iff\left(\frac{X}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^2+\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

Puisque $\sqrt{2}>\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, alors l'axe focal suivant (OY), on a donc

$$a=\sqrt{\frac{2}{3}},\ b=\sqrt{2}$$

$$c^2=b^2-a^2=\frac{4}{3}\Longrightarrow c=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{ et } e=\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

De manière générale, si $\alpha\in]0,1[$, on a $a=\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, $c=\sqrt{\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}}$ et $e=\sqrt{\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}}$.

Si $\alpha \in]-1, 0[$ l'axe focal ext (OX), $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}}$ et $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}}$.

Pour $\alpha = 2$, on a

$$3X^2 - Y^2 = 1 \iff \frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} - Y^2 = 1$$

c'est bien l'équation réduite d'une hyperbole, l'axe focal est suivant (OX). On a

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3},\ b = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{4}{3} \implies c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ et } e = 2$$

De manière générale, si $\alpha > 1$, on a $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha - 1}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}}$ et $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}}$

Et si $\alpha < -1$, l'axe focal est suivant (OY), $a = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{-1-\alpha}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}}$ et $e = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}}$.

Vous pouvez vérifier avec le grapheur des fonctions implicites

Exercice 4

$M(z), M_1(z^2)$ et $M_2(z^5)$ sont alignés $\Longleftrightarrow \dfrac{aff\left(\overrightarrow{MM_2}\right)}{aff\left(\overrightarrow{MM_1}\right)} \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \frac{z^5 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z^4 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R} \text{ et } z \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow (z+1)\left(z^2+1\right) \in \mathbb{R} \text{ et } z \neq 0,\ z \neq 1.$$

$$\Longleftrightarrow \Im m\left((z+1)\left(z^2+1\right)\right) = 0 \text{ et } z \neq 0,\ z \neq 1.$$

$$\Longleftrightarrow \Im m\left((x+iy+1)\left(x^2+2ixy-y^2+1\right)\right) = 0 \text{ où } x \neq 0,\ y \neq 0 \text{ et } x \neq 1.$$

$$\Longleftrightarrow \Im m\left(x^3+3ix^2y+x^2-3xy^2+2ixy+x-iy^3-y^2+iy+1\right) = 0 \text{ où } x \neq 0,\ y \neq 0 \text{ et } x \neq 1.$$

$$\Longleftrightarrow 3x^2+2x-y^2+1 = 0 \text{ où } x \neq 0,\ y \neq 0 \text{ et } x \neq 1.$$

$$\Longleftrightarrow 3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - y^2 = -\frac{2}{3} \text{ où } x \neq 0,\ y \neq 0 \text{ et } x \neq 1.$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 1$$

c'est une équation reduite d'une hyperbole $\mathcal{H}$ privé de O (O *n'est pas un point de* $\mathcal{H}$)et privé des points d'intersection de $\mathcal{H}$ avec la droite d'équation $x = 1$, les points $K\left(1, \sqrt{6}\right)$ et $K'\left(1, -\sqrt{6}\right)$.

Alors $\mathcal{H}$ de centre le point $\Omega\left(\dfrac{-1}{3}, 0\right)$, d'axe focal suivant (Oy)

Soit $M(x,y)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et $M(X,Y)$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. Donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ on aura

$$\begin{cases} x = X - \dfrac{1}{3} \\ \\ y = Y \end{cases} \qquad (*)$$

Donc l'équation sera $-\dfrac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 1$, alors $a = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $b = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$.

Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\mathcal{H}$ est une hyperbole de foyer $F\left(0, \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$ et $F'\left(0, -\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$ d'axe transverse (Oy) de sommets $A\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ et $A'\left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, d'excentricité $e = \frac{c}{b} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, et de directrices $\mathcal{D} : Y = \frac{b^2}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ associée à F. Et $\mathcal{D}$ associée à F', $\mathcal{D}' : Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.Dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et vu les relations $(*)$

$F\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$, $F'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$, $A\left(-\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ et $A'\left(-\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Donc $\mathcal{H}$ est un hyperbole privée de K et K'.

Exercice 5

Soit H le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$ donc $FH = \frac{5}{2}$ soit S le milieu de $[FH]$. Donc le paramètre de la parabole $(\mathcal{P})$ est $p = -\frac{5}{2}$ (*car* $x_F = \frac{1}{2} < 3$), et $S\left(\frac{7}{4}, 2\right)$ (*car* $x_S = \frac{x_F + x_H}{2}$).

Dans le repère $\left(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, un point $M(X, Y) \in (\mathcal{P})$ vérifier $Y^2 = -2pX = -5X \quad (1)$

Dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, le point $M(x, y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}$ alors $\begin{cases} x = X + \frac{7}{4} \\ y = Y + 2 \end{cases}$

En remplaçant dans (1). L'équation de la parabole $(\mathcal{P})$:

$$(y-2)^2 + 5\left(x - \frac{7}{4}\right) = 5x + (y-2)^2 - \frac{35}{4} = y^2 - 4y + 5x - \frac{19}{4} = 0.$$

La Conique

Exercice 6

1. Nature et éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{H})$

$3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \iff (3x^2 + 2x) - y2 + 1 = 0$

$\iff 3(x^2 + \frac{2}{3}x) - y^2 + 1 = 0 \iff 3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) - y^2 + 1 = 0$

$\iff 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - y^2 + \frac{2}{3} = 0 \iff 3X^2 - Y^2 = -\frac{2}{3}$ en posant $X = x + \frac{1}{3}$ et $Y = y$

$\iff -\frac{X^2}{\frac{2}{9}} + \frac{Y^2}{\frac{2}{3}} = 1$

On est en présence d'une équation de la forme $-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

En conclusion $(\mathcal{H})$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où $\Omega\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

est une hyperbole de centre Ω d'axe transverse focal $\left(\Omega, \vec{j}\right)$,d'axe non transverse $\left(\Omega, \vec{i}\right)$

De sommets $B\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ et $B'\left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, d'asymptotes les droites $\mathcal{D}_1 : Y = \sqrt{3}X$ et $\mathcal{D}_2 : Y = -\sqrt{3}X$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

De foyers $F(0; c)$ et $F'(0; -c)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, d'excentricité $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$.

Dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$:

$B\left(-\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $B'\left(-\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $F(-\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3})$ et $F'(-\frac{1}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3})$.

2. en posant $z = x + iy$

$Z = 1 + z + z^2 + z^3 = 1 + (x + iy) + (x + iy)^2 + (x + iy)^3$

$= 1 + x + iy + x^2 + 2xiy + i^2y^2 + x3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

$= 1 + x + x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2 + i(y + 2xy + 3x^2y - y^3)$ donc $\Re e(Z) = 1 + x + x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2$ et $\Im m(Z) = y + 2xy + 3x^2y - y^3 = y(1 + 2x + 3x^2 - y^2)$

(a) cas $z = 1$

Alors A, M et M' sont confondus car $z = 1$ et $z^4 = 1$ donc on peut considérer que ces points sont alignés.

Page dáccueil
Page de Titre
Sommaire
Page 10 de 19
Retour
Full Screen
Fermer
Quitter

(b) cas $z \neq 1$

A, M et M' soient alignés $\iff$ il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AM'}$

$\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = k\pi$

$\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg\left(\dfrac{z^4 - 1}{z - 1}\right) = k\pi$

$\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg\left(\dfrac{(z-1)\left(1 + z + z^2 + z^3\right)}{(z-1)}\right) = k\pi$

$\iff 1 + z + z^2 + z^3 = Z \in \mathbb{R}$

$\iff \Im m(Z) = 0$

$\iff y(1 + 2x + 3x^2 - y^2) \iff y = 0$ ou $1 + 2x + 3x^2 - y^2 = 0.$

$\iff M \in (\mathcal{H}) \cup (O, \overrightarrow{i})$ privée du point $A(1,0)$ car $z \neq 1$.

3. En conclusion, que $z = 1$ ou $z \neq 1$ on a $\Gamma = (\mathcal{H}) \cup (O, \overrightarrow{i})$.

La Conique

Exercice 9

1. Soit $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^n} \implies u'(x) = -\dfrac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}} \\ v'(x) = 1 \implies v(x) = x \end{cases}$, Une intégration par parties donne

$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx.$$

Or,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = I_n - I_{n+1}.$$

Regroupant les termes, on trouve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right) \iff 2nI_{n+1} = (2n-1)\,I_n + \frac{1}{2^n} \iff I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

2. On a

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

alors

$$I_2 = \frac{2\times 1-1}{2\times 1}I_1 + \frac{1}{1\times 2^{1+1}} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

et

$$I_3 = \frac{2\times 2-1}{2\times 2}I_2 + \frac{1}{2\times 2^{2+1}} = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

Page dáccueil

Page de Titre

Sommaire

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Retour

Full Screen

Fermer

Quitter

Exercice 10

1. On a

$$
\begin{aligned}
K = \int_0^\pi x^2 e^{(1+i)x} dx &= \int_0^\pi x^2 e^x e^{ix} dx \\
&= \int_0^\pi x^2 e^x (\cos x + i \sin x)\, dx \\
&= \int_0^\pi x^2 e^x \cos x dx + i \int_0^\pi x^2 e^x \sin x dx.
\end{aligned}
$$

Alors

$$I = \Re e(K).$$

2. En intégrant K par parties, on trouve

$$
\begin{aligned}
K &= \left[\frac{x^2 e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi - \frac{2}{1+i}\int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx \\
&= -\frac{\pi^2 e^\pi}{1+i} - \frac{2}{1+i}\int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx.
\end{aligned}
$$

On fait une deuxième intégration par parties pour calculer cette dernière intégrale, et on trouve

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx &= \left[\frac{x e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi - \frac{1}{1+i}\int_0^\pi e^{(1+i)x} dx \\
= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}\left[e^{(1+i)x}\right]_0^\pi &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} - \frac{i}{2}(1+e^\pi).
\end{aligned}
$$

Regroupant tous les termes, et multipliant par la quantité conjuguée au dénominateur, on trouve

$$K = -\frac{\pi^2 e^\pi}{1+i} - \frac{2}{1+i}\left(-\frac{\pi e^\pi}{1+i} - \frac{i}{2}(1+e^\pi)\right) = \left(\frac{1}{2}e^\pi - \frac{1}{2}\pi^2 e^\pi + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2}e^\pi + \frac{1}{2}\pi^2 e^\pi - \pi e^\pi + \frac{1}{2}\right)$$

soit

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi x^2 e^x \cos x dx = \frac{1-\pi^2}{2} e^\pi + \frac{1}{2}. \\
I' &= \int_0^\pi x^2 e^x \sin x dx = \frac{(1-\pi)^2}{2} e^\pi + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

3. On commence par linéariser $\sin^2 x$ et on trouve
$J = \int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} e^{-x}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{1-e^{-2\pi}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(2x)\,dx$
On calcule alors la dernière intégrale en utilisant les complexes. On trouve

$$\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(2x)\,dx = \Re e\left(\int_0^{2\pi} e^{(2i-1)x}dx\right) = \Re e\left(\left[\frac{e^{(2i-1)x}}{2i-1}\right]_0^{2\pi}\right)$$
$$= \Re e\left(\frac{1}{5}(2i+1)\left(1-e^{-2\pi}\right)\right) = \frac{1}{5}(1-e^{-2\pi}).$$

Finalement, on trouve

$$J = \frac{2}{5}(1-e^{-2\pi}).$$

Exercice 11
Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1,1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle.
Par intégration par parties on pose

$$\begin{cases} u(t) = t \implies u'(t) = 1 \\ \\ v'(t) = f'(t) \implies v(t) = f(t) \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} xf'(x)dx = [tf(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(x)dx$$
$$\int_{-1}^{1} xf'(x)dx = f(1) + f(-1) - \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Or $f(1) + f(-1) = 0$ donc

$$\int_{-1}^{1} xf'(x)dx = -\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Page dáccueil
Page de Titre
Sommaire
Page 14 de 19
Retour
Full Screen
Fermer
Quitter

Exercice 12

1.

(a) La fonction $f(x) = \cos^4 x - \cos^2 x$ définier dérivable sur $\mathbb{R}$.
Et

$$f'(x) = -4\sin x\cos^3 x + 2\sin x\cos x.$$

Alors

$$f''(x) = -4\left(\cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x\right) + 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

(b)
$f''(x) = -4\cos^4 x + 12\cos^2 x\sin^2 x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$
$f''(x) = -4\cos^4 x + 12\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right) + 2\cos^2 x - 2\left(1-\cos^2 x\right)$
$f''(x) = -4\cos^4 x + 12\cos^2 x - 12\cos^4 x + 2\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x$
$f''(x) = -16\cos^4 x + 16\cos^2 x - 2$
$f''(x) = -16\left(\cos^4 x - \cos^2 x\right) - 2$
$f''(x) = -16f(x) - 2$
Donc pour tout réel x,

$$f''(x) + 16f(x) = -2.$$

2. Soit

$$16I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-f''(x) - 2\right)dx.$$

Alors

$$16I = \left[-f'(x) - 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi + f'(0) \text{ Or } f'(0) = 0 \text{ et } f'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Donc $I = -\dfrac{\pi}{16}$.

Exercice 13

1. Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$ donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $x^n \geq 0$ donc en multipliant l'inégalité précédente par x^n pour tout $x \in [0,1]$, on a

Page dáccueil
Page de Titre
Sommaire
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 15 de 19
Retour
Full Screen
Fermer
Quitter

$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n.$$

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}x^n$, $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ et $x \mapsto x^n$ sont définies continues sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$ donc $\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^n dx$
Puisque

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

alors

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0. \text{ Donc } \lim_{n\to+\infty} J_n = 0.$$

3. $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(x-1)\,x^n}{1+x^2}dx$
Pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{(x-1)\,x^n}{1+x^2} \leq 0$, et la fonction $x \mapsto \frac{(x-1)\,x^n}{1+x^2}$ continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \frac{(x-1)\,x^n}{1+x^2}dx.$
Alors

$$J_{n+1} - J_n \leq 0 \text{ donc la suite } (J_n) \text{ est décroissante.}$$

4. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$J_n + J_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2}dx$$

donc

$$J_n + J_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$ (*d'après le calcul de la question* 2).

5. pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc en remplaçant n par $n-2$ pour tout entier $n \geq 3$, on a $\frac{1}{2(n-1)} \leq J_{n-2} \leq \frac{1}{n-1}$ or $J_{n-2} + J_n = \frac{1}{n-1}$ donc

$J_n + \frac{1}{2(n-1)} \leq J_n + J_{n-2} \leq J_n + \frac{1}{n-1}$ soit $J_n + \frac{1}{2(n-1)} \leq \frac{1}{n-1} \leq J_n + \frac{1}{n-1}$

donc en ne considérant que la première partie de l'inégalité $J_n + \frac{1}{2(n-1)} \leq \frac{1}{n-1}$ soit $J_n \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}$

donc pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{2\,(n-1)}$.

donc pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{n}{2(n+1)} \leq nJ_n \leq \frac{n}{2\,(n-1)}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$.

6. $J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ donc en appliquant cette relation à $n = 1$, $J_1 + J_3 = \frac{1}{2}$

donc $J_3 = \frac{1-\ln 2}{2}$.

en appliquant cette relation à $n = 3$, $J_3 + J_5 = \frac{1}{4}$ donc $J_5 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$.

Exercice 14

$1.$ f est définie continue dérivable sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$.

$$f(x)=\frac{e^x}{x}\times\frac{1}{\frac{1}{x}-1} \text{ or } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=-1, \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to1^+}(1-x)=0^- \text{ donc } \lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-x}=-\infty, \text{ et } \lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)=0^+ \text{ donc } \lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x}=+\infty, \text{ et } \lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty.$$

Donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe de f.
On a

$$f'(x)=\frac{e^x(1-x)-(-1)e^x}{(1-x)^2}=\frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

Le tableau de variation de la fonction f

Tableau De Variation

$2.$ A est le point de la courbe de f d'abscisse 0 donc a pour coordonnées $(0,f(0))$ soit $(0,1)$
La tangente en A à $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=2x+1$.
$3.$ B est le point de la courbe de f d'abscisse $\frac{1}{2}$ donc a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2})\right)$ soit $\left(\frac{1}{2},2\sqrt{e}\right)$

La droite (AB) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2\sqrt{e}-1}{\frac{1}{2}-0}=4\sqrt{e}-2$

La droite (AB) a donc une équation de la forme $y=(4\sqrt{e}-2)x+b$

Cette droite passe par A donc $y_A = (4\sqrt{e} - 2)\, x_A + b$ donc $b = 1$
La droite (AB) a pour équation $y = (4\sqrt{e} - 2)\, x + 1$.
La position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite (AB) est

Position relative

4.

(a) La fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ soit } 1 \leq f(x) \leq 2\sqrt{e}.$$

(b) Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$1 \leq f(x) \leq 2\sqrt{e}.$$

Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{e}dx.$$

Alors

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \leq \sqrt{e}.$$

Donc

$$1 \leq I \leq \sqrt{e}.$$

5.

(a) Pour tout $x \in [0,1[$, $1 + x + \dfrac{x^2}{1-x} = \dfrac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$.

(b) Pour tout $x \in [0,1[$, $\dfrac{e^x}{1-x} = (1+x)e^x + \dfrac{x^2e^x}{1-x}$ soit $f(x) = (1+x)e^x + x^2 f(x)$.

Donc $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$.

(c) On a $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^x dx = [xe^x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

Alors $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{e} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$.

Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $1 \leq f(x) \leq 2\sqrt{e}$, donc $x^2 \leq x^2 f(x) \leq 2\sqrt{e}x^2$.

Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{e}x^2 dx.$$

$$\text{Or } \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{\sqrt{e}}{12}.$$

Puisque $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{e} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$, alors $\dfrac{1}{2}\sqrt{e} + \dfrac{1}{24} \leq I \leq \dfrac{7}{12}\sqrt{e}$.