Lycée Nasrallah « $4^{ème}$ SC » Prof : Ben Taieb Lotfi	2016/2017 **Série Révision** MATHEMATIQUES **Espaces et primitives**

EXERCICE1

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points A(2,0,3) ; B(1,1,0) et C(0 , 3 , 1)

1) a) Calculer les composantes de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan qu'on notera P.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan P.

Dans toute la suite on prend P : $7x + 4y - z - 11 = 0$

3) Soit Δ la droite définie par le système : $\begin{cases} x = 9 - 14\alpha \\ y = 3 - 8\alpha \\ z = -2 + 2\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \text{IR}$

a) Montrer que Δ est perpendiculaire au plan P.

b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite Δ et le plan P.

4) Soit le plan Q d'équation : $x - 2y - z + 1 = 0$

a) Montrer que les plans P et Q sont perpendiculaires.

b) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D intersection des deux plans P et Q.

5) a)Déterminer les coordonnées du point K projeté orthogonal du point H sur le plan Q.

b) Montrer que les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.

Exercice 2

Dans l'espace rapporter à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on considère l'ensemble (S)

d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 23 = 0$.

1/ Justifier que (S) est une sphère de centre le point I(1,-1,0) et de rayon 5.

2/ Soit le point J(-1,1,1) et soit P l'ensemble des points M(x,y,z) tels que $\overrightarrow{JI}.\ \overrightarrow{JM} = 0$.

a. Justifier que P est le plan d'équation $2x - 2y - z + 5 = 0$.
b. Montrer que l'intersection de (S) et P est le cercle (C) de centre J et de rayon 4.

3/ Soit le point A(-5,5,3) et (S') la sphère de centre A et de rayon $2\sqrt{13}$

a. Montrer que A appartient à la droite (IJ).
b. Montrer que AJ = 6.

4/ Soit M un point du cercle (C).

a. Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.
b. En déduire que $AM = 2\sqrt{13}$
c. Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan P.

Exercice 3

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(-2,2,1)$, $B(-2,1,2)$, $C(-1,1,1)$ et I(-1,2,2).

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan (qu'on notera P).

2) Montrer alors qu'une équation du plan P est $x + y + z - 1 = 0$

3) a) Montrer que les points A, B, C et I ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume V du tétraèdre IABC, puis calculer sa hauteur issue de I.

4) Montrer que le point I appartient à l'axe du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.

Exercice 4

On pose f(x)= $\frac{x^3-2x^2-4x+7}{(x-2)^2}$

a. Déterminer D_f

b. Déterminer les réels a,b et c pour que f(x) = ax+b + $\frac{c}{(x-2)^2}$

c. Montrer que f admet des primitives sur]2,+∞[

d. Déterminer la primitive F de f sur]2,+∞[qui s'annule en 3

Exercice 5

1/ Soit f(x) =$\frac{1}{1+x^2}$ avec x ∈ ℝ

a. Montrer que f admet au moins une primitive sur ℝ

b. Soit F la primitive de f sur ℝ qui s'annule en 0. Montrer que F est impaire

2/ $\forall\ x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on pose g(x) = F(tanx)

a. Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer g'(x). En déduire que g(x) = x

b. Calculer F($\frac{1}{\sqrt{3}}$) et F(-$\frac{1}{\sqrt{3}}$)

3/Soit H la fonction définie sur [0,+∞[par H(x) =F($\frac{1}{x+1}$) + F($\frac{x}{2+x}$)

Calculer H'(x). En déduire que F($\frac{1}{2}$) +F($\frac{1}{3}$) = $\frac{\pi}{4}$