⁕LES NOMBRES COMPLEXES ⁕

I/OPERATIONS ALGEBRIQUES SUR LES NOMBRES COMPLEXES :

1) Forme algébrique d'un complexe :

Activité :

Ecrire sous la forme algébrique chacun des complexes suivants :

(2-i)(1+3i) ; $(1+i)^2$; $(1-i)^3$; (3+4i)(3-4i) ; $\frac{2+3i}{1-2i}$

Retenons :

Soit a et b deux réels. L'écriture z=a+ib s'appelle la forme algébrique (ou l'écriture cartésienne) du nombre complexe z.

le réel a est la partie réelle de z. Le réel b est la partie imaginaire de z.

2) Représentation géométrique d'un nombre complexe :

Activité :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C et I d'affixes respectifs : $z_A=1+2i$, $z_B=-1+i$, $z_C=4i$ et $z_I=\frac{3}{2}i$

1) Placer les points A, B, C et I .

2) Vérifier que I est le milieu de [AB].

3) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire l'affixe du vecteur $\vec{w}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

4) Déterminer l'affixe du point D tél que ACBD soit un parallélogramme.

Retenons :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé.

• Tout complexe z=a+ib ,(avec a et b sont deux réels) est représenté par le point M(a,b). On dit que M est l'image de z et on note M(z) et que z est l'affixe de M et on note aff(M) ou z_M

• Pour tous points A ,B et I on a :(I milieu de [AB]) équivaut à $(z_I=\frac{z_A+z_B}{2})$

• Pour tous points A et B du plan on a $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

• Pour tous réels α et β et tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{S}$ on a : $\text{aff}(\alpha.\vec{w}+.\vec{S})=\alpha.z_{\vec{w}}+\beta.z_{\vec{S}}$

• Pour tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{S}$ on a : $(\vec{w}=\vec{S})$ équivaut à $(z_{\vec{w}}=z_{\vec{S}})$

Remarque :

$z_O=0$ et $z_{\vec{0}}=0$

3) Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

Soit z=a+ib un nombre complexe donné sous la forme algébrique. On appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\bar{z}=a-ib$

Activité :

Répondre par vrai ou faux :

1) Si z=x+iy alors $\bar{z}=x-iy$ (avec x et y deux complexes).

2) Soit $z=(1+2i)^4(3-5i)$ alors $\bar{z}=(1-2i)^4(3-5i)$

3) $\overline{\left(3i+\frac{1+i}{2-4i}\right)}=3i-\frac{1-i}{2-4i}$

4) $\bar{5}=-5$

Propriétés :
Soit les complexes z et z'. alors on a :

• $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$ $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour z'≠0

•(z est réel) équivaut à ($z=\overline{z}$)

• (z est imaginaire pur) équivaut à ($\overline{z}=-z$)

Activité :
Soit z=a+ib avec a et b deux réels. Calculer :
$z+\overline{z}$; $z-\overline{z}$ et $z.\overline{z}$

Retenons :
Soit z=a+ib avec a et b deux réels. Alors :
$z+\overline{z}=2a$ $z-\overline{z}=2ib$ $z.\overline{z}=a^2+b^2$

Exercice :
On donne dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A(-2-i) , B(1+3i) et le point I milieu de [AB].
1) En posant z=x+iy , déterminer une équation cartésienne de $\Delta=\{M(z) \in P\, ;4(z+\overline{z})+3i(z-\overline{z})+10=0\}$ puis tracer Δ.
2) Soit l'ensemble $\mathcal{C}=\{M(z) \in P\, ;2z.\overline{z}+(1+2i)z+(1-2i)\overline{z}=10\}$
a) Caractériser $\mathcal{C}$ par une équation cartésienne.
b) Montrer que $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [AB], puis tracer $\mathcal{C}$.

4) Module d'un nombre complexe :

Définition :
Soit z=a+ib un complexe donné sous la forme algébrique. On appelle module de z et on note $|z|$ le réel positif défini par $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z.\overline{z}}$

Remarques :
1) Pour tout complexe z on a : $|\overline{z}|=|z|$
2)Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit z un complexe et M(z) alors :
$|z|$ =OM

Activité :
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A et B deux points d'affixes respectifs $z_A=1+2i$ et $z_B=-1+i$
Montrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

Retenons :
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Alors pour tous points A et B on a : $AB=|z_B-z_A|$

Propriétés :
Pour tous complexes z et z', on a :
$|z.z'|=|z||z'|$ $|z^n|=|z|^n$; $n\in IN^*$ $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$; z'≠0

Remarque :
Pour tout réel α, on a : $|\alpha.z|=|\alpha||z|$. En particulier $|-z|=|z|$

Exercice1 :
Calculer : $\left|\sqrt{3}(1+i)-1\right|$; $\left|(1+2i)^4(1-i\sqrt{3})\right|$; $\left|\frac{(2-i)^2}{\sqrt{3}+i}\right|$

Exercice2 :
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A(1+i), B(-2i) et C(1). Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble E des points M(z) :
a) $|z-i-1|=2$ b) $|\overline{z}-2i|=|z-1|$

5) Argument d'un nombre complexe non nul :

Activité :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) placer les points A(2+2i), B(3i), C(2), D(-2i) et E(-3).

2) Par une lecture graphique, déterminer $\arg(z_A)$; $\arg(z_B)$; $\arg(z_C)$ et $\arg(z_D)$.

3) Placer les points E et F d'affixes respectifs $\overline{z_A}$ et $-z_A$ puis déterminer $\arg(z_E)$ et $\arg(z_F)$

Retenons :

1) Définition :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un complexe non nul et M(z). On appelle argument de z et on note arg(z) toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On écrit $\arg(z) \equiv \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})}[2\pi]$

2) Cas particuliers :

- $(z \in \mathbb{R}_+^*)$ équivaut à $(\arg(z) \equiv 0[2\pi])$
- $(z \in \mathbb{R}_-^*)$ équivaut à $(\arg(z) \equiv \pi[2\pi])$
- (z=ib avec b>0) équivaut à $(\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi])$
- (z=ib avec b<0) équivaut à $(\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi])$

3) Pour tout complexe non nul z on a :

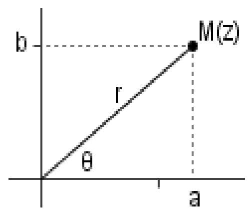
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

II/ Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un complexe non nul :

1) Forme trigonométrique :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z=a+ib un complexe non nul sous la forme algébrique et M l'image de z. Soit r un réel >0 et θ un réel tels que $|z|$ =r et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ alors $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$



- (r,θ) est le couple de coordonnées polaires de M
- (a,b) est le couple de coordonnées algébriques de M

Conséquence :

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ c'est la forme trigonométrique de z.

Exercice :

Déterminer la forme trigonométrique de chacun des complexes suivants : $z=1+i\sqrt{3}$ et $z'=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$

Réciproquement :

Si un complexe z s'écrit sous la forme $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec r un réel >0 et θ un réel, alors :
$|z|$ =r et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Notation :

Pour tout r>0 et pour tout réel θ, on note : $r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r, \theta]$

Cas particuliers :

- $i=[1,\frac{\pi}{2}]$; $-i=[1,-\frac{\pi}{2}]$; $1=[1,0]$; $-1=[1,\pi]$
- Si $\alpha > 0$ alors $\alpha=[\alpha,0]$
- Si $\alpha < 0$ a lors $\alpha=[-\alpha, \pi]$

Remarque : Soit $z=[r, \theta]$ et $z'=[r', \theta']$, alors on a : $(z=z') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta'[2\pi] \end{cases}$

Propriétés :

Soit $z=[r, \theta]$ et $z'=[r', \theta']$, alors :

$\overline{z}=[r,-\theta]$ $\quad -z=[r,\pi+\theta]$ $\quad \frac{1}{z}=[\frac{1}{r},-\theta]$

$z.z'=[r.r', \theta'+\theta]$ $\quad z^n=[r^n, n.\theta]$; $(n \in \mathbb{N})$

$\frac{z}{z'}=[\frac{r}{r'}, \theta-\theta']$

Remarque :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ c'est la formule de MOIVRE
⇨ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n=[1,\theta]^n=[1,n\theta]=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

Exercice :
Déterminer la forme trigonométrique de chacun des complexes suivants :

$z_1=2i(1+i)^4$ $\quad\quad$ $z_2=\dfrac{2i}{1-i}$

2) Forme exponentielle :

Définition :
Pour tout réel θ, on note : $\boldsymbol{\cos\theta+i\sin\theta = e^{i\theta}}$ et on lit exponentielle iθ. Ainsi : $\boldsymbol{e^{i\theta}=[1,\theta]}$
Soit un complexe non nul z=[r,θ]. L'écriture $z=re^{i\theta}$ s'appelle la forme exponentielle de z.

Exemple :
$z=\sqrt{3}+i$

$r=|z|=2.$ $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$ alors $\theta\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ d'où $z=2.e^{i\frac{\pi}{6}}$

Complexes particuliers :

$1=\boldsymbol{e^{i0}}$ $\quad\quad$ $-1=\boldsymbol{e^{i\pi}}$ $\quad\quad$ $i=\boldsymbol{e^{i\frac{\pi}{2}}}$ $\quad\quad$ $-i=\boldsymbol{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

Remarque :
Pour tout réel θ et pour tout k∈ ℤ, on a : $\boldsymbol{e^{i(\theta+k2\pi)}=e^{i\theta}}$
Exemples : $e^{i\frac{\pi}{2}}=e^{i\frac{5\pi}{2}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}}=e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Exercice :
Ecrire chacun des complexes suivants sous la forme algébrique :
$2.e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $5.e^{i3\pi}$; $3e^{-i6\pi}$; $2.\boldsymbol{e^{i\frac{9\pi}{2}}}$

Propriétés :
Soit les complexes non nuls $z=re^{i\theta}$ et $z'=r'e^{i\theta'}$ (r>0 , r'>0 , θ ∈IR et θ' ∈IR), alors on :

- $\overline{z}=re^{-i\theta}$
- $z.\overline{z}=r.r'e^{i(\theta+\theta')}$
- $-z=r\,e^{i(\theta+\pi)}$
- $z^n=r^ne^{in\theta}$ ∀ n∈ ℤ
- $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Exercice :
Ecrire chacun des complexes suivants sous la forme exponentielle :
$\dfrac{i.(\sqrt{3}-i)^2}{1-i\sqrt{3}}$; $e^{i4\theta}.(\cos\theta-i\sin\theta)^3$; $\dfrac{-\cos\theta-i\sin\theta}{e^{-i\theta}}$

Cas particuliers :(cas où r=r'=1)

- $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$
- $e^{i\theta}.e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$
- $-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ ∀ n ∈ ℤ
- $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

Exercice :
1) Développer : $e^{ix}.\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$; $\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2$; $\left(e^{ix}+e^{iy}\right)\left(e^{ix}-e^{iy}\right)$
2) Factoriser et simplifier :
$\dfrac{e^{i(x+y)}+e^{i2x}}{e^{ix}+e^{iy}}$; $\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{i2x}+1}$

Activité :
Soit θ un réel. Exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ à l'aide de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Retenons : (Les formules d'EULER)
Pour tout réel θ on a :
$\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\quad\quad$ $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Remarque :
Il est parfois utile d'écrire $e^{i\theta} + e^{-i\theta}=2\cos\theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta}=2i\sin\theta$

Exercice1 :

1) On se propose d'écrire sous la forme exponentielle le complexe : $z=i+e^{i\frac{\pi}{3}}$

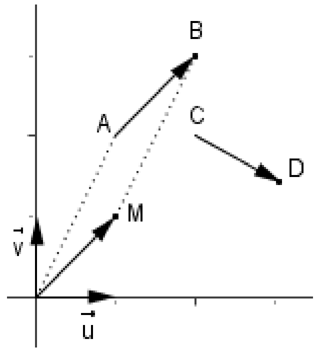
a) En écrivant i sous la forme exponentielle factoriser z par : $e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{13}}$

b) Donner alors la forme exponentielle de z

2) Ecrire sous la forme exponentielle chacun des complexes suivants : $1+e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}-1$

Exercice2 :
Soit x un réel. Utiliser les formules d'EULER pour écrire $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$ comme sommes de termes de la forme a cos(nx) et b sin(nx) ; a et b sont deux réels et n un entier naturel.
⇨ On dit qu'on a linéarisé les expressions $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$

III/ colinéarité et orthogonalité de deux vecteurs :



Activité :

1) Montrer que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}})\equiv\arg(z_B - z_A)[2\pi]$

2) En déduire que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})\equiv\arg(z_D - z_C)-\arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$

Retenons :
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que A≠B et C≠D. Alors :

$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}})\equiv\arg(z_B - z_A)[2\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})\equiv\arg(z_D - z_C)-\arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$

$\equiv \arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\ [2\pi]$

$\equiv \arg(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}})\ [2\pi]$

D'une manière générale : $(\widehat{\vec{w},\vec{x}})\equiv \arg(\frac{z_{\vec{x}}}{z_{\vec{w}}})[2\pi]$

Exercice :
1) Placer les points E(-4+2i), F(-3+3i) et G(-2i).

2) Déterminer : $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OE}})$; $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{EG}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}})$

Activité :
Soit $\vec{w}$ et $\vec{x}$ deux vecteurs non nuls.

1) Montrer que : ($\vec{w}$ et $\vec{x}$ sont colinéaires)⇔($\frac{z_{\vec{x}}}{z_{\vec{w}}} \in$ IR)

2) Montrer que : ($\vec{w}$ et $\vec{x}$ sont orthogonaux)⇔($\frac{z_{\vec{x}}}{z_{\vec{w}}}$ est imaginaire pur)

Retenons :
Soit $\vec{w}$ et $\vec{x}$ deux vecteurs non nuls. Alors :
- ($\vec{w}$ et $\vec{x}$ sont colinéaires)⇔($\frac{z_{\vec{x}}}{z_{\vec{w}}} \in$ IR)
- ($\vec{w}$ et $\vec{x}$ sont orthogonaux)⇔($\frac{z_{\vec{x}}}{z_{\vec{w}}}$ est imaginaire pur)

Exercice :
Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points R,S,T et M d'affixes respectifs 2+i ; 4+2i ; $5+\frac{5}{2}i$ et $3-i$

1) Calculer $\frac{z_S-z_R}{z_T-z_R}$. En déduire que R, S et T sont alignés.

2) Calculer $\frac{z_S-z_R}{z_M-z_R}$. En déduire que le triangle RSM est rectangle et isocèle en R.

Exercices à la maison :
Act.4p226+6p237+18p239

IV/ Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul :

1) Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel positif :

Soit n un entier naturel.

Si T est un réel positif, alors la racine $n^{\text{ième}}$ de T est l'unique réel positif k tel que $k^n=T$

On note : $\sqrt[n]{T}=k$ ou bien $T^{\frac{1}{n}}=k$.

Ainsi on peut écrire $(\sqrt[n]{T})^n=T$ ou bien $(T^{\frac{1}{n}})^n=T$.

■ Si n=2, alors on obtient la racine carrée habituelle. On note $\sqrt{T}=k$ ou encore $T^{\frac{1}{2}}=k$.

Exemples :

$\sqrt[3]{125}=5$; $\sqrt[4]{81}=3$; $16^{\frac{1}{2}}=4$; $8^{\frac{1}{3}}=2$; $\sqrt[5]{0}=0$

2) Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul :

Définition :

Soient n un entier naturel non nul et T un nombre complexe non nul.

On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de T, tout complexe z vérifiant : $z^n=T$

■Si T=1, alors on dit que z est une racine $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Exemple :

$(1+i)^3=2i-2$. Alors 1+i est une racine cubique de 2i−2.

$(1+i)^2=2i$. Alors 1+i est une racine carrée de 2i.

1,-1, i et –i sont les racines quatrièmes de 1. (les solutions de l'équation $z^4=1$)

Théorème :

Soit r un réel strictement positif, θ un réel et le complexe $T=re^{i\theta}$. Alors T admet dans $\mathbb{C}$ n racines $n^{\text{ième}}$ distinctes : $z_k=\sqrt[n]{r}.\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ avec $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$

■ Les images M_k des complexes z_k sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Exercice 1 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3=8i$

2) Représenter les images des solutions de (E).

Exercice 2 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

déterminer les racines sixièmes de l'unité.