Fonction logarithme népérien

I/ Définition et propriétés:

Définition

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}$

On appelle fonction logarithme népérien (notée ln) la primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

⇨ Ainsi la fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$\boxed{\ln(1)=0}$ et $\boxed{\ln'(x)=\frac{1}{x}\ \forall\ x>0}$

Exercice :

Soit la fonction $f : x \longmapsto x.\ln x$

1) Vérifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$

2) En déduire une primitive F de la fonction ln sur $]0,+\infty[$

Retenons :

La fonction $F: x \longmapsto x.\ln x-x$ est une primitive de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.

Sens de variation et règles de comparaison:

■ **La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.**

⇨ Pour tous réels a et b de $]0,+\infty[$ on a :

- $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$
- $\ln a>\ln b \Leftrightarrow a>b$
- $\ln a>0 \Leftrightarrow a>1$
- $\ln a<0 \Leftrightarrow 0<a<1$
- $\ln a=0 \Leftrightarrow a=1$

Exercice :

1) Donner le signe de chacun des réels suivants puis les ranger dans l'ordre croissant :

$\ln(0,12)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln(\frac{2}{3})$ et $\ln(\frac{2\sqrt{3}}{3})$

2) a) Résoudre dans IR l'inéquation : $\ln(2x-3)\geq 0$

b) Dresser le tableau de signe de l'expression $\ln(2x-3)$

3) Résoudre dans IR dans chacun des cas suivants : a) $\ln(x-1)=\ln(3-x)$ b) $\ln(x-1)>\ln(3-x)$

II/Propriété fondamentale et conséquences :

Activité1:

Soit la fonction $g : x \longmapsto \ln(ax)$; $a>0$

1) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x>0$.

2) Calculer $g(1)$ puis déduire que $g(x)=\ln x+\ln a$ pour tout $x>0$.

3) Transformer en somme : $\ln(14)$ et $\ln(10)$

Propriété fondamentale :

Pour tous réels strictement positifs a et b on a : $\boxed{\ln(ab)=\ln a+\ln b}$

Généralisons :

- Pour tous réels a, b et c strictement positifs, on a : $\ln(abc)=\ln a+\ln(bc)=\ln a+\ln b+\ln c$
- Pour tous réels $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n$ strictement positifs on a : $\ln(a_1.a_2.a_3\ldots a_n)=\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i)$

Activité 2:

Soit $x>0$ et $n\in IN$

1) Ecrire $\ln(x^2)$; $\ln(x^3)$; $\ln(x^4)$ en fonction de $\ln x$

2)En déduire une conjecture pour : $\ln(x^n)$; $n\in IN$

Activité 3:

Soit x et y deux réels strictement positifs.

1) En remarquant que : $\frac{1}{x}.x=1$, montrer que $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

2) Montrer alors que $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ on a : $\ln(x^n)=n.\ln x$

Retenons :

Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout $n\in\mathbb{Z}$ on a :

$$\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y \quad ; \quad \ln(x^n)=n.\ln x}$$

Cas d'un exposant rationnel :

Notation : Pour tous $p\in\mathbb{Z}$; $q\in IN^*$ et $x>0$, on note : $x^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{x}$ et $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}=(\sqrt[q]{x})^p$

Exemple : $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=(\sqrt[3]{8})^2=4$; $81^{0,75}=81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=(\sqrt[4]{81})^3=27$

Activité 4:

Soit $r=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in IN^*$. Soit $x>0$

1) En écrivant $x=x^{\frac{q}{q}}$, montrer que $\ln(x^{\frac{1}{q}})=\frac{1}{q}.\ln x$

2) En déduire que $\ln(x^r)=r.\ln x$

3) Ecrire en fonction de ln2 l'expression suivante : $A=\ln(\sqrt{2})+\ln(\sqrt[3]{4})+\ln(\frac{1}{8})+\ln(\sqrt[4]{\frac{1}{4}})$

Retenons :

Pour tout réel $x>0$ et pour tout $r\in\mathbb{Q}$, on a : $\ln(x^r)=r.\ln x$

En particulier : pour $r=\frac{1}{2}$, on a : $\ln(\sqrt{x})=\ln(x^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}.\ln x$

Exercice :

Simplifier chacune des expressions suivantes :

a) $A=\ln 60+\ln 20-2.\ln 10$

b) $B=\ln(a^3.b^4)-\ln(a^2.b^3)$

c) $C=\ln\left(\frac{a^2}{b^3}\right)+\ln\left(\frac{b^2}{a}\right)$

II/ Etude de la fonction ln :

Activité1 :

1) On suppose que la fonction ln est majorée sur $]0,+\infty[$.

  a) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = L \in IR$

  b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x)$. En déduire que $L=L+\ln 2$

  c) Que peut-on conclure ? Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$

2) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x$

Retenons :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

Activité2 :

1) Dresser le tableau de variation de la fonction ln.

2) En déduire que l'équation $\ln x=1$ admet une unique solution notée e dans $]1,+\infty[$

3) Vérifier que $2< e < 3$

4) Vérifier que $\forall r \in \mathbb{Q}$ on a : $\ln(e^r)=r$

Retenons :

•$\ln 1=0$

•$\ln e=1$ avec $2<e<3$ ($e\approx2,71828$). e s'appelle la base du logarithme népérien.

•$\ln(e^r)=r$; $\forall r \in \mathbb{Q}$

Activité3 :

Soit g la fonction définie sur $I=[1,+\infty[$ par $g(x)=2\sqrt{x} - \ln x$

1) Montrer que g est strictement croissante sur I.

2) a) Calculer g(1). En déduire le signe de g(x) sur I et qu'on a : $\ln x \le 2\sqrt{x}$

   b) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$

3) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} x.\ln x$

Retenons :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to0^+} x.\ln x = 0$

Activité4 :

Soit $f : x \longmapsto \ln x$. On désigne par (C) sa courbe représentative selon un orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Préciser la nature de chacune des branches infinies de (C).

2) Donner une équation de la tangente T à (C) au point A(1,0).

3) Donner une équation de la tangente T' à (C) au point B(e,1)

4) Tracer la courbe (C) ainsi que T et T'.

Exercice :

Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+} (2x+1)\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-\ln x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt[3]{x})}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{(x-1)^3}$

Activité :

1) En admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^r = 0$ $\forall r \in \mathbb{Q}_+^*$:

 a) Vérifier que : $\forall r \in \mathbb{Q}_+^*$ et $\forall x>0$ on a : $\frac{1}{r}\ln(x^r)=\ln x$

 b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^r\ln x$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\frac{2}{3}} \ln x$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x} \ln x$

Retenons :

$\forall\, r \in \mathbb{Q}_+^*$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r \ln x = 0$

III/ Etude d'une fonction de type $x \longmapsto \ln[u(x)]$:

Activité1 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^2 + 3x - 4)$

En remarquant que f est la composée de deux fonctions, montrer que f est dérivable sur $]-\infty, -4[$.

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur une partie D de IR et telle que $\forall\, x \in D$, on a : $u(x)>0$, alors la fonction f définie sur D par $f(x)=\ln(u(x))$ est dérivable sur D et on a : $\forall\, x \in D$, $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

Activité2 :

Soit u une fonction dérivable et non nulle sur une partie D de IR. soit la fonction f définie sur D par : $f(x)=\ln|u(x)|$. Montrer que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$.

Corollaire1 :

Si u est une fonction dérivable sur une partie D de IR et telle que $\forall\, x \in D$, on a : $u(x)\neq 0$, alors la fonction f définie sur D par $f(x)=\ln|u(x)|$ est dérivable sur D et on a : $\forall\, x \in D$, $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple :

$f(x)=\ln|x^2 - 1|$. Déterminer l'ensemble D sur lequel f est dérivable et calculer $f'(x)$.

Corollaire2 :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de IR et telle que $\forall\, x \in D$, on a : $u(x)\neq 0$.

Alors les primitives de la fonction $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions F définies sur I part $F(x)= \ln|u(x)|+c$

Exercice :

Déterminer dans chacun des cas suivants la primitive F de f sur I qui s'annule en x_0.

a) $f : x \longmapsto \frac{2x+3}{x^2+3x+4}$ $I=IR$; $x_0=1$

b) $f : x \longmapsto \frac{1}{x.\ln x}$ $I=]0,1[\cup]1,+\infty[$; $x_0=e$

Activité3 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \ln(x+1)$

1) Déterminer D_f

2) Vérifier que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$

3) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

Retenons :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exercice :

Calculer : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} x.\ln(1+\frac{1}{x})$

Exercice à la maison :

N10+22page136-139