FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE

I/ Théorème de la bijection :

Activité :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{4}x^2$. Soit g sa restriction à l'intervalle $I=[0,+\infty[$

(g est définie sur I par g(x)=f(x))

1) a) Montrer que g est continue et strictement croissante sur I.
   b) Déterminer l'intervalle J=g(I).
2) a) g est elle une application ?
   b) Soit $y\in J$. Prouver que l'équation g(x)=y admet une solution unique dans I.

■ Ainsi tout x de I admet une seule image y dans J et tout y de J admet un seul antécédent x dans I
On dit alors que g est une bijection de I sur J.

3) Soit h la fonction définie sur J par $h(x)=2\sqrt{x}$.

Soit $x\in I$ et $y\in J$. Montrer que g(x)=y équivaut à h(y)=x [exemple : g(8)=16⟺ h(16)=8]

■ h s'appelle la fonction réciproque de g. On note $h=g^{-1}$

$$x \overset{g}{\longmapsto} y \overset{h}{\longmapsto} x$$

Retenons :

Soit I un intervalle de IR. Une fonction f est dite bijection de I sur f(I) s'il existe une fonction notée f^{-1} telle que pour tout x de I et pour tout y de f(I) on a : y=f(x) équivaut à $x=f^{-1}(y)$.

f^{-1} s'appelle la fonction réciproque de f.

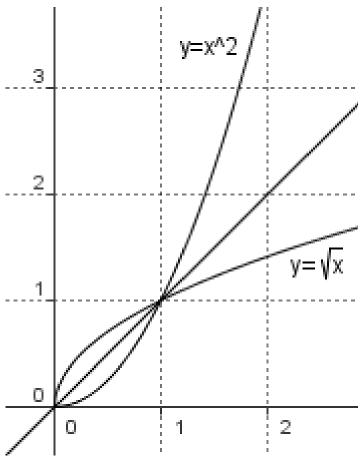
$$I \xrightarrow{f} f(I) \xrightarrow{f^{-1}} I$$
$$x \longmapsto y \longmapsto x$$

Théorème de la bijection :

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de IR, alors :

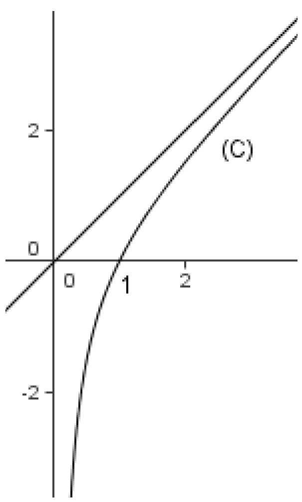
1) f est une bijection de I sur f(I).
2) La fonction réciproque f^{-1} de f est strictement monotone sur f(I) et elle admet le même sens de variation que f.
3) Si de plus f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur l'intervalle J=f(I).
4) Les courbes (C) et (C') de f et f^{-1} selon un repère orthonormé du plan sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ : y=x du repère.

exemple



Remarque :

1) Si f est une bijection de I sur f(I) alors sa fonction réciproque f^{-1} est une bijection de f(I) sur I
2) Pour tout x de I, on a : $(f^{-1}o\ f)(x)=x$ et pour tout x de f(I), on a $(f\ o\ f^{-1})(x)=x$

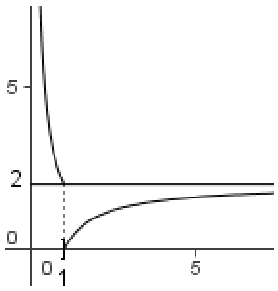


Exercice :

Soit la fonction f définie sur IR^* par $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$.

Soit g sa restriction à l'intervalle $I=]0,+\infty[$.

1) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera
2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.
3) Tracer la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1}



Remarque :
Ce graphique montre que la fonction f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ malgré qu'elle n'est ni continue ni strictement monotone sur $]0,+\infty[$.

II/ Fonction racine $n^{ième}$:

Activité1 :
Soit les fonctions $g : x \longmapsto x$ et $h : x \longmapsto x^2$
1) Montrer que les fonctions g et h réalisent chacune une bijection de IR_+ sur IR_+.
2) Préciser leurs fonctions réciproques.

Activité 2:
Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x^n$; $n\in IN^*$
Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.
⇨ On note $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$

Retenons :
Soit $n\in IN^*$. La fonction $f : x \longmapsto x^n$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Sa fonction réciproque s'appelle fonction racine $n^{ième}$ et on note $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ ou bien $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}$ pour tout $x\in [0,+\infty[$.

$f : IR_+ \longrightarrow IR_+$ $\qquad$ $f^{-1} : IR_+ \longrightarrow IR_+$
$\quad x \longmapsto x^n$ $\qquad\qquad$ $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

Ainsi pour tout $x\in [0,+\infty[$ et pour tout $y\in [0,+\infty[$ on a : **$y=x^n$ équivaut à $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}$**

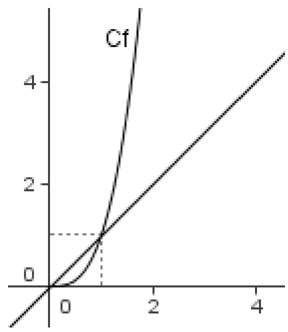
Exemple : $\sqrt[3]{125}=5$; $\sqrt[4]{81}=3$; $\sqrt[4]{0}=0$

∗ Alors on peut écrire $(\sqrt[n]{\mathbf{x}})^{\mathbf{n}}=\mathbf{x}$ et $\sqrt[n]{\mathbf{x^n}}=\mathbf{x}$ pour tout $y \in [0,+\infty[$.

∗ Pour n=2 : $f^{-1}(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ la fonction racine carrée habituelle.

Remarque :
pour tos entiers naturels p et q ≥1 et pour tout réel x≥0 on note : $\sqrt[q]{\mathbf{x^p}} = x^{\frac{p}{q}}$

Activité4 :
Le plan étant muni d'un repère orthonormé.
1) Etudier la continuité et le sens de variation de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt[3]{x}$
2) Voici la courbe de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\mathbf{x^3}$
a) Tracer dans le même repère la courbe Cg.
b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$



Propriétés :
Soit $n \in IN^* \setminus \{1\}$. Soit la fonction $g : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
1) g est définie, continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$
2) Dans un repère orthonormé la courbe de g admet au $V(+\infty)$ une BIP de direction celle de l'axe des abscisses et au point O(0,0) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.
3) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$ $(x_0>0)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{x}=0$

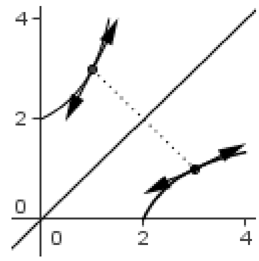
III/ Dérivabilité d'une fonction réciproque :

Activité1 :
Soit f une bijection d'un intervalle I de IR sur J=f(I). soit a un réel de I et b=f(a). On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a)\neq 0$.
Montrons que f^{-1} est dérivable en b et donner $(f^{-1})'(b)$
⇨ Soit y un réel de f(I) distinct de b et soit $x=f^{-1}(y)$. Alors $x\in I$ et $x\neq a$ (car f est une application de I vers J)

$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

Lorsque $y\longrightarrow b$, $x\longrightarrow a$ (car f^{-1} est continue en b). Donc $\lim\limits_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}=\frac{1}{f'(a)}$

Alors f^{-1} est dérivable en b et on a : $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$



Retenons :

Soit f une bijection d'un intervalle I de IR sur J=f(I). Soit a un réel de I et b=f(a).
Si f est dérivable en a et f '(a)≠0 alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en b et on a : $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Corollaire :

Soit f une bijection d'un intervalle I de IR sur J=f(I).
Si f est dérivable sur I et f 'ne s'annule pas sur I alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur J et on a : $(f^{-1})'=\frac{1}{f'of^{-1}}$

Exercice 1:

Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+3}$; $x \in [0,+\infty[$.
1) Montrer que réalise une bijection de [0,+∞[sur un intervalle J qu'on déterminera.
2) a) Calculer $f^{-1}(2)$.
b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.
3) f^{-1} est elle dérivable à droite en $\sqrt{3}$? Justifier.
⇨ 3) $f'_d(0)=0$ alors la courbe de f admet au point $A(0,\sqrt{3})$ une demi-tangente parallèle à l'axe des abscisses. Par symétrie par rapport à la première bissectrice du repère orthonormé la courbe de f^{-1} admet au point $A'(\sqrt{3},0)$ une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnés. Ce qui prouve que f^{-1} n'est pas dérivable à droite en $\sqrt{3}$.
4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in [\sqrt{3},+\infty[$.
5) Déterminer la partie de J où f^{-1} est dérivable et calculer $(f^{-1})'(x)$.

Remarques :

1) Si f est dérivable en a et f'(a)=0 alors f^{-1} n'est pas dérivable en b=f(a).
2) Si f n'est pas dérivable en a alors f^{-1} peut être dérivable en b=f(a). Par exemple : le cas où Cf admet au point A(a,b) une tangente verticale.

Exercice2 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \cos x$
1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$sur un intervalle J qu'déterminera..
2) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.
3) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à gauche en 1.
b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur [0,1[et que $(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x\in [0,1[$.

Exercices à la maison :

13 p. 74+20p.76