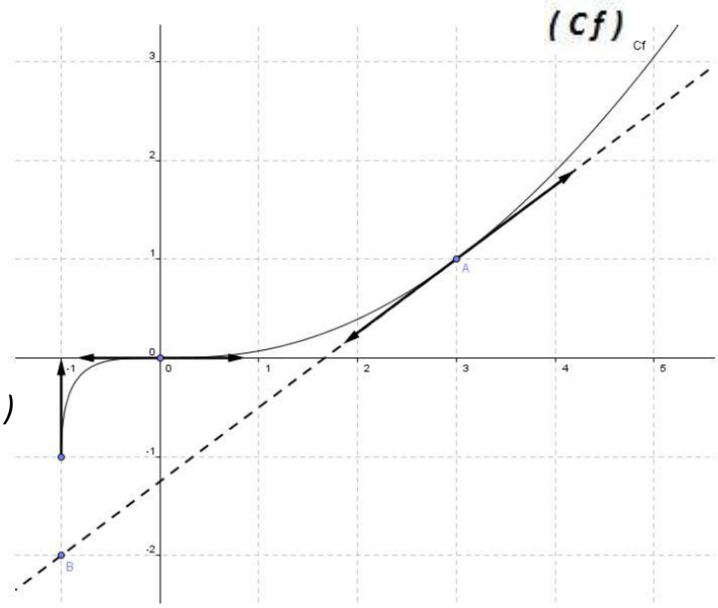
Lycée Houmet Souk	Devoir de Synthèse N : 1	4 Techniques 1
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 3 Heures	04 - 01 - 2017

EXERCICE N : 1 (2.5 points)



*La courbe **(Cf)** ci-contre représente une fonction f définie sur [- 1 ; + ∞ [.*

1) Justifier que f est une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2) Déterminer : $f'(3)$; $(f\circ f)'(0)$; $f^{-1}([-1;1[)$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)+1}{x+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)-3}{x-1} \quad .$$

3) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]0,1[$ vérifiant : $(f^{-1})'(\alpha)=3$.

EXERCICE N : 2 (4 points)

L'espace (ξ) est rapporté à un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .On donne les points

$A(3,2,2)$; $B(0,2,1)$ et $C(0,1,1)$ et la droite : $\Delta : \begin{cases} x=3-\alpha \\ y=4+\alpha \\ z=2\alpha \end{cases}$; $(\alpha \in IR)$

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

b) Montrer que la droite (AB) et Δ ne sont pas coplanaires .

2) a) Montrer que les points A , B et C forment un plan .

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

3) Donner une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à la droite (AB) en A .

4) a) Donner une représentation paramétrique de la droite D parallèle à (AB) et passant par C .

b) En déduire les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point C sur le plan P .

c) Déduire la distance d (C , P) .

d) Retrouver autrement la distance d (C , P) .

5) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .

b) En déduire la nature quadrilatère ABCH .

EXERCICE N : 3 (3 .5 points)

Soit la fonction définie sur [0 ; 1] par : $g(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1) *Etudier les variations de* g *sur* $[0 ; 1]$.

2) *Déduire que la fonction* g *admet une réciproque* g^{-1} *définie sur* $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

3) a) g^{-1} *est-elle dérivable à gauche de* $\frac{1}{2}$. *(Justifier la réponse)*

b) *Justifier que la fonction* g^{-1} *est dérivable sur* $\left[0 ; \frac{1}{2}\right[$.

4) a) *Calculer* $g^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ *et* $(g^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right)$.

b) *Montrer que pour tout* $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right[$, $(g^{-1})'(x) = -\frac{4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}$.

EXERCICE N : 4 (4.5 points)

1) a) *Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe* $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

b) *Ecrire sous forme algébrique les racines quatrième de* $(-2 + 2i\sqrt{3})$.

2) *Soit* $f(Z) = Z^2 + (1 - 2i\sqrt{3})Z - 2 + 2i\sqrt{3}$ *où* Z *est un nombre complexe* .

a) *Calculer* $f(1)$.

b) *Déterminer alors les solutions de l'équation* $f(Z) = 0$.

c) *Déduire dans* $\mathbb{C}$ *les solutions de l'équation :* $Z^8 + (1 - 2i\sqrt{3})Z^4 - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

3) *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \vec{u}, \vec{v})$. *On considère les points* $A_{(1)}$, $B_{(-2+2i\sqrt{3})}$ *et* C *d'affixe* Z_C *tel que* $Re(Z_C) = \frac{5}{2}$ *et* $\arg(Z_C) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

a) *Placer les points A , B et C (laisser les traces de constructions apparentes) .*

b) *Calculer* $|Z_C|$ *puis déduire que* $Z_C = \frac{5}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

4) a) *Prouver que* $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) *Déduire alors la nature du triangle ABC (Justifier) .*

EXERCICE N : 5 (5.5 points)

A) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \in]0;1[\\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in [1;+\infty[\end{cases}$

On désigne par **(C f)** sa courbe représentative dans le repère orthonormé **R** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Vérifier que f est continue en 1 .

b) Etudier dérivabilité de f à droite et à gauche de 1 . Interpréter graphiquement les résultats .

2) a) Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à **(C f)** .

c) Préciser la position de **(C f)** par rapport à Δ sur $[1;+\infty[$.

d) Tracer la droite Δ et la courbe **(C f)** dans le repère **R** .

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle **J** que l'on précisera .

b) Déterminer $(f^{-1})'(0)$.

4) a) Tracer la courbe **(C** f^{-1} **)** dans le même repère **R**

b) Montrer que pour tout $x \in]-\infty;0]$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.