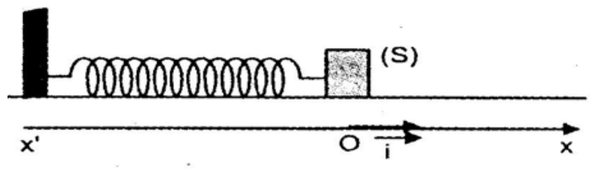
Exercice n° 1

Un pendule élastique horizontal est formé par un solide de masse **m = 0,1 Kg** *lié à un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur* **k = 25,6 N.m^{-1}.**
Le pendule est soumis à une force excitatrice **F** *horizontale de valeur algébrique* **F = 3sin(ω t)** *et à une force de frottement* **f = - hv** *avec* **h = 1,4 Kg.s^{-1}**.
La réponse est de la forme : **$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$**



1- *Pour une pulsation* **ω = 20 rad.s^{-1}**, *le solide (S) prend un mouvement sinusoïdal d'amplitude* **X_m.**

- **a-** *Etablir l'équation différentielle de l'oscillateur avec la variable* **x.**
- **b-** *Calculer la pulsation propre de l'oscillateur.*
- **c-** *Construire son diagramme de Fresnel.*
- **d-** *En déduire la valeur de* **X_m** *et établir l'équation horaire du mouvement de* **(S).**

2- *Pour une pulsation* **ω_1** *de l'excitateur,* **X_m** *prend sa valeur maximale* **X_1**.

- **a-** *Préciser l'état d'oscillation du pendule élastique.*
- **b-** *Calculer* **ω_1** *et* **X_1.**

3- *On fixe* **ω = 16 rad.s^{-1}**

- **a-** *Montrer que le pendule élastique est en état de résonance de vitesse.*
- **b-** *Etablir l'expression de la vitesse instantanée du* **(s)**.
- **c-** *Représenter sur le même graphique les fonctions* **F(t) et f(t).**
- **d-** *Montrer que l'énergie mécanique du système est constante, calculer sa valeur.*

Exercice n° 2

*Un solide **(S)** de masse **m** est fixé à l'une des extrémités d'un ressort **(R)** à spires non jointives. De masse négligeable. de raideur **k = 25 N.m⁻¹** et dont l'autre extrémité est fixe. Le **solide (S)** est assujetti à se déplacer suivant l'axe du ressort **(R)**maintenu fixe et horizontal, tout en étant soumis à des frottements visqueux équivalents à une force **f = - hv**, où **h** est une constante positive appelée coefficient de frottement et **V** est la vitesse instantanée du solide **(S),**on donne **h = 1,4 N.s.m⁻¹**.*
*On applique au solide (S) une force excitatrice **F = (1,1 sin2πNt)**,ou **N** est la fréquence réglable de l'excitateur. Le solide (**S**) se met à osciller suivant **(O, i)**de part et l'autre de la position d'équilibre **O** de son centre d'Inertie **G**.*

*On désigne par **x(t)**l'élongation de **G** en fonction du temps par rapport au repère **(O, i).***

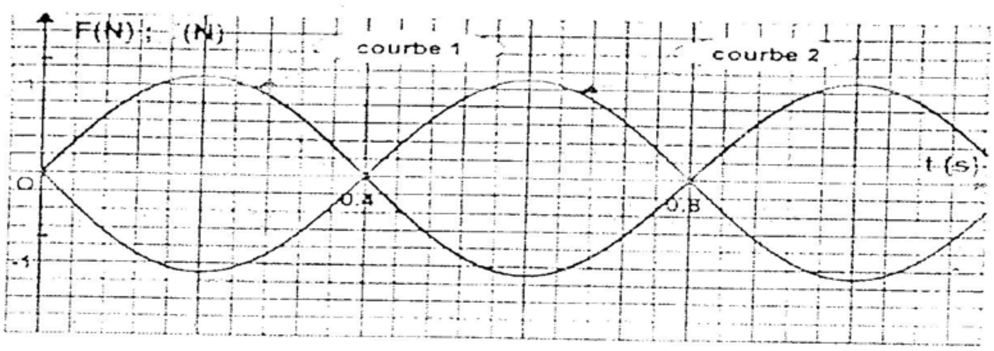
1- ***a**-par application de la relation fondamentale de la dynamique, montré que les oscillations du centre d'inertie **G** du solide **(S)** sont règles par l'équation différentielle :*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 . X = \frac{F}{m} \text{ où } \tau = \frac{m}{h} \text{ et } \omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$

b- *Cette équation différentielle admet comme solution$x(t) = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x)$.*
De quel régime d'oscillations s'agit-il ? Justifier la réponse.

2- *La fréquence **N** de l'excitateur étant fixée à une valeur particulière N_1. On trace avec un dispositif approprié, les chronogrammes de la figure ci-contre ; l'un représente l'évolution de **F** et l'autre représente celle de **f** au cours du temps.*

a- *Déterminer parmi les courbes **(1)** et (**2**) celle qui représente **F(t).***



b- *A l'aide des deux courbes **(1)** et **(2),** déterminer :*

- *La valeur N_1 de la fréquence de l'excitateur.*
- *La valeur de l'amplitude F_m de la force de frottement **F.***
- *En déduire la valeur de X_m et celle de φ_x.*

c- *Montrer qu'a tout instant **x(t)** vérifie la relation :* $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 . X = 0$

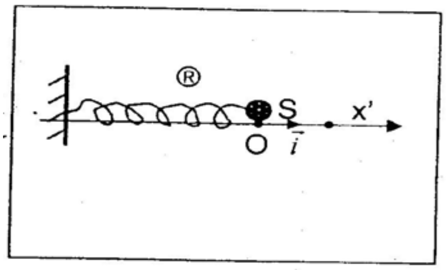
- *En déduire que l'oscillateur **{(S), (R)}** est en résonance de vitesse.*
- *Montrer que son énergie totale **E** est constante.*

d- *Déterminer la valeur de la masse m du solide **(S).***

Exercice n° 3

*Un solide (**S**) de masse **m** et de centre d'inertie **G** est attaché à l'une des extrémités d'un ressort **(R)**horizontal à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur **K**.*

*Au cour du mouvement la position de **G** sera repérer par son abscisse **X** dans le repère **(O ; i),** dans l'origine **O** coïncide avec la position de **G** a' l'équilibre.*



*Au cours de son mouvement **(S)** est soumis à une force de frottement visqueuse $f = -hv$;**h** est une constante strictement positive et **v** est la vitesse instantanée du centre de gravité **G**du solide.*

Pour entretenir les oscillations, l'oscillateur est excité par une force de fréquence variable de la forme $F = F_m\sin(\omega t + \varphi_F)$ *(F_m et φ_F sont des constantes)*

1- *Etablir l'équation différentielle du mouvement de **(S)** avec la variable **x**.*

2- *Pour une valeur $\omega = \omega_1$, on obtient les courbes de la figure **1** représentent **F(t)** et **x(t).***

- **a-** *Montrer que la courbe (**1**) correspond à **F(t)***
- **b-** *Exprimer alors **F(t)** et **x(t).***
- **c-** *Sur la **(figure 2**) on a représenté les vecteurs de Fresnel associés à **F(t)** et **K.x**.*
- **d-** *Compléter cette construction en traçant dans l'ordre les vecteurs associés à* $m\frac{d^2x}{dt^2}$ *et* $h\frac{dx}{dt}$.

3- *Exprimer*

- **a-** X_m *en fonction de* F_m, h, K, m *et* w_1
- **b-** $\sin(\varphi_F - \varphi_x)$ *en fonction de* F_m, h, X_m *et* w_1
- **c-** $tg(\varphi_F - \varphi_x)$ *en fonction de* h, m, w_1 *et* ω_0. *(ω_0 pulsation propre de l'oscillateur).*
- **d-** *Calculer la valeur de **h.***

4- *Pour une valeur ω_2 les courbes qui représentent **F(t)** et **f(t)** sont données dans la **figure 3**.*

- **a-** *Montrer qu'a tout instant :* $m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$.
- **b-** *En déduire que l'énergie mécanique **E** du système **{S, R}** est constante.*
- **c-** *Montrer que l'oscillateur est le siège d'une résonance de vitesse.*
- **d-** *Déterminer ω_2 et **m** et déduire que* $K = 40\ N.m^{-1}$.

5- *Pour une valeur ω_3 de **w** , la valeur de la tension du ressort est maximale.*

- **a-** *De quel phénomène physique s'agit-il ?*
- **b-** *Déterminer ω_3.*
- **c-** *Exprimer **x** en fonction du temps.*

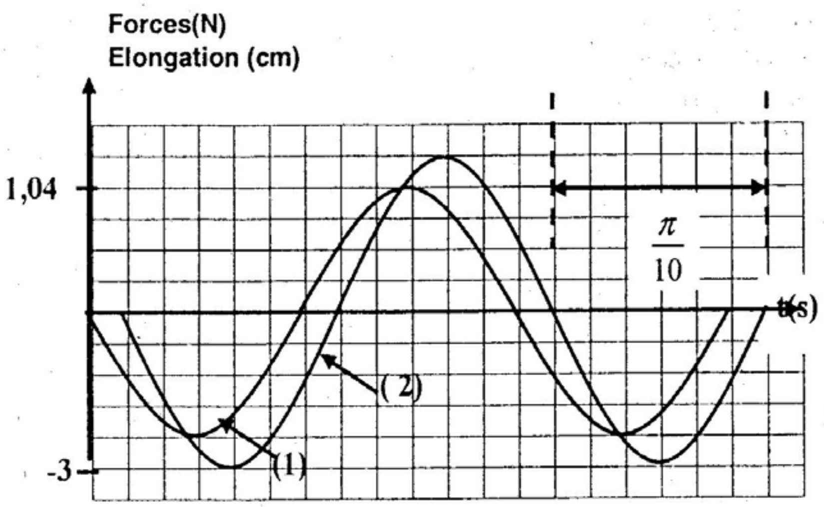


Figure 1

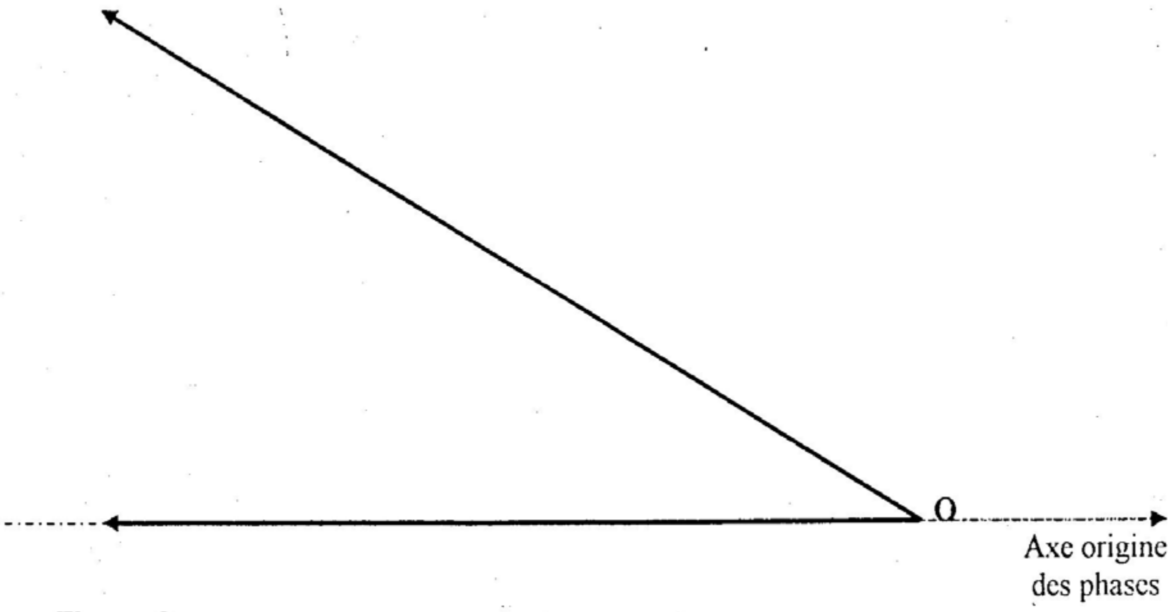


Figure 2

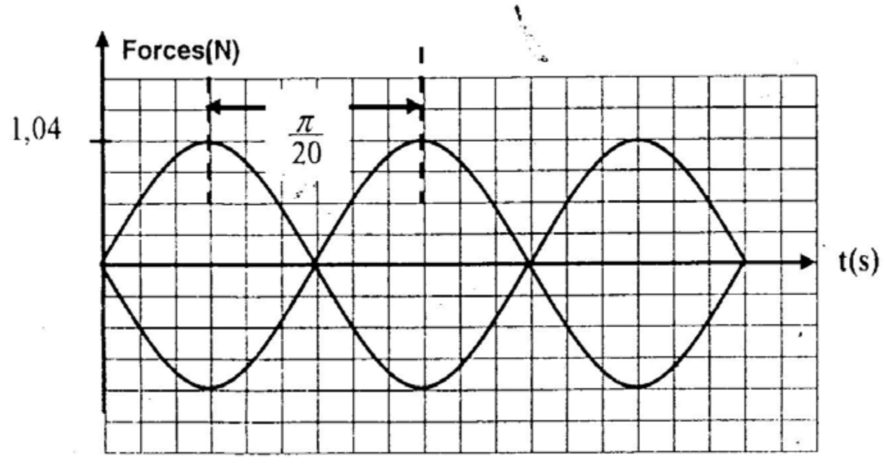
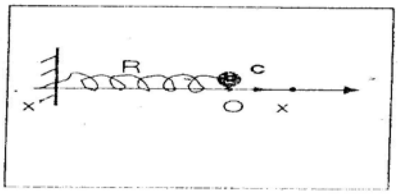


Figure 3

Exercice n° 4

*Un solide **C** de masse **m = 100 g**et de centre **G** est attaché à l'une des extrémités d'un ressort **R**vertical à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur **K = 10 Nm^{-1}***

*Au cours du mouvement la position de **G** sera repérer par son abscisse **x**dans le repère **(O, i)**,dont l'origine **O**coïncide avec la position de **G** à l'équilibre.*



A- Oscillations libres amorties :

*On écarte **C** de sa position d'équilibre de **X_o = 5 cm** puis on l'abandonne sans vitesse initiale **à t_o = os**.*

*Au cours de son mouvement **C** est soumis à une force de frottement visqueux**f = - h.v, h**est une constante strictement positive et **v** est la vitesse instantanée du centre de gravité **G** du solide.*

1- *Etablir l'équation différentielle du mouvement de **C.***

2- *Indiquer, selon l'importance du coefficient d'amortissement **h**, les régimes possibles du mouvement de **C**. Donner à chaque cas l'allure de la courbe**x = f(t).***

3- *Soit **E** l'énergie de l'oscillateur à une date **t**quelconque. Montrer que $\frac{dE}{dt}$= -hv^2.*
Interpréter ce résultat.

B- Oscillations forcées

*Pour entretenir les oscillations, l'oscillateur est excité par une force de fréquence variable de la forme **$F = F_m \sin(\omega_e\, t)$***

1- *Donner les expressions de :*

a- *L'amplitude$X_m$en fonction deF_m , h , K , m etω_e.*
b- *$tg(\varphi_F - \varphi_x)$en fonction de h, ω_e , K et m.*
c- *Montrer que **F(t)** est toujours en avance de phase par rapport à **x(t)** quelque soit la valeur de **ω***
d- *Peut – on obtenir la résonance d'élongation dans les conditions suivantes :*
ω_e<10 rad.s^{-1}et h >$\sqrt{2}$Kg.s^{-1}.Justifier votre réponse.

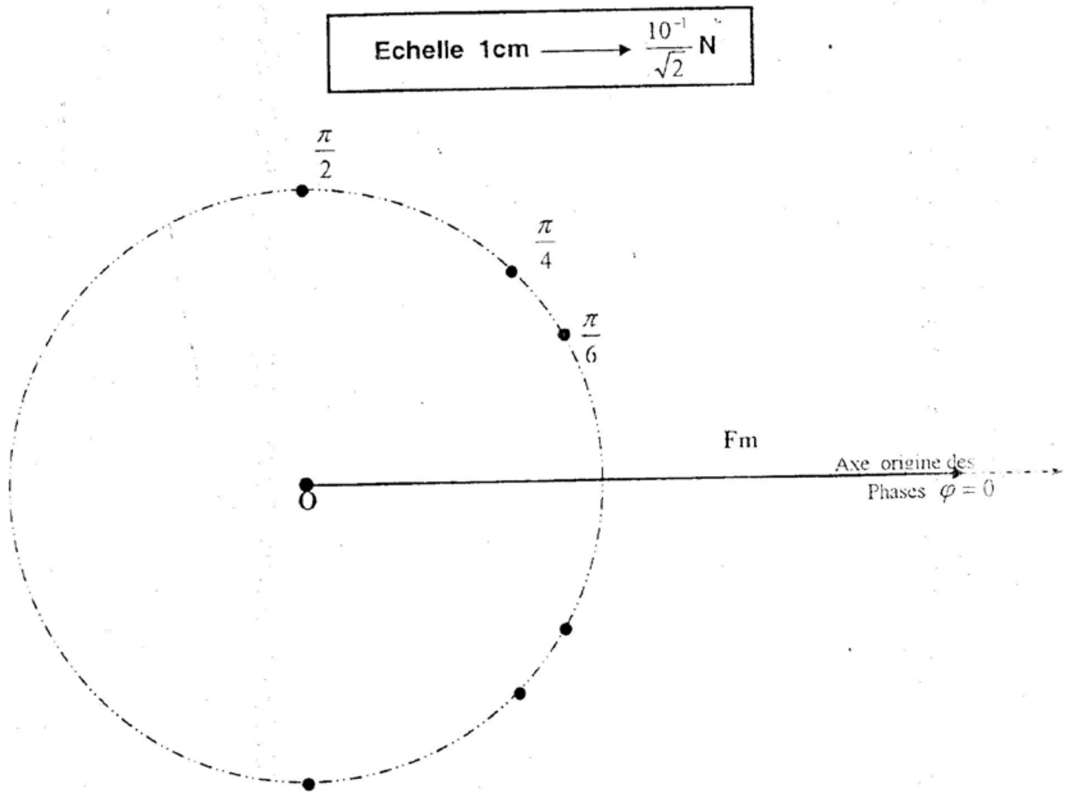
2- *On se place dans les conditions ou$x = x_m \sin(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t - \frac{\pi}{4})$,ou$\omega_e$est la pulsation propre de l'oscillateur étudié.*

a- *Compléter la construction (figure page suivante) en traçant dans l'ordre les vecteurs de Fresnel associés à **Kx**, $m\frac{d^2x}{dt^2}$et $h\frac{dx}{dt}$*

b- *Déduire de cette construction les valeurs deF_m, $X_m$et h.*

c- *Montrer que l'énergie mécanique **E** du système (solide, ressort) est constante pour une valeur précise de ω_e que l'on précisera.*

d- *Y-a-t-il résonance dans ce cas, si oui de quelle résonance s'agit-t-il ?*



Exercice n°5

*Un solide **C** de masse **m** et de centre d'inertie **G** est attaché à l'une des extrémités d'un ressort **R**horizontal à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur **K**.*

*Au cours du mouvement la position de **G**sera repérer par son abscisse x dans le repère (**O, i),** dont l'origine **O**coïncide avec la position de **G** à l'équilibre.*

A- Oscillations libres amorties

*On écarte **C**de sa position d'équilibre de x_o **= 3cm** puis on l'abandonne sans vitesse initiale **A'** t_o **= os**. Au cours de son mouvement **C** est soumis à une force de frottement visqueux. **f =-h.v** ; **h** est une constante strictement positive et **v** est la vitesse instantanée du centre de gravité**G**du solide.*

1- *Etablir l'équation différentielle du mouvement de **C***

2- *Soit **E** l'énergie de l'oscillateur à une date **t** quelconque. Montrer que* $\frac{dE}{dt} = f\ \frac{dx}{dt}$

Interpréter ce résultat.

B- *Oscillations forcées*

Pour entretenir les oscillations, l'oscillateur est excité par une force de fréquence variable de la forme

$F = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$

1- *Etablir l'équation différentielle du mouvement de **C** avec la variable x.*

2- *La solution de cette équation différentielle est* $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$.
*Déduire l'expression de la valeur algébrique **T(t**) de la tension du ressort.*

3- *On donne sur la figure ci-dessous les courbes **F(t) et T(t).***

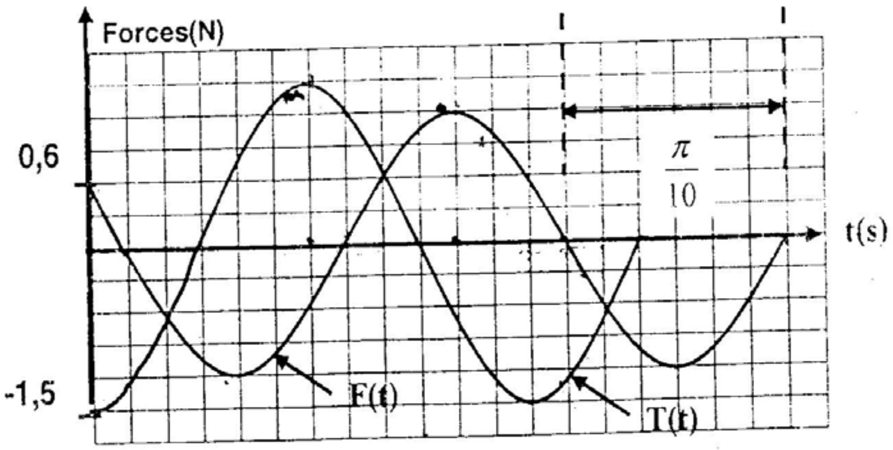
- **a-** *Déduire du graphique les valeurs de ω et* $(\varphi_F - \varphi_T)$. *Montrer que* $(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{\pi}{3}$.
- **b-** *Déterminer les expressions de **F(t) et T(t).**(Préciser les valeurs de* F_m , T_m , φ_F *et* φ_T)
- **c-** *Représente sur la figure (page suivante) le diagramme de Fresnel relatif aux forces.*
- **d-** *On donne* $h = \sqrt{3}$ **Kg.s^{-1}** *et on prendra* $\omega = \omega_1 = 10$ **rad.s^{-1}.**

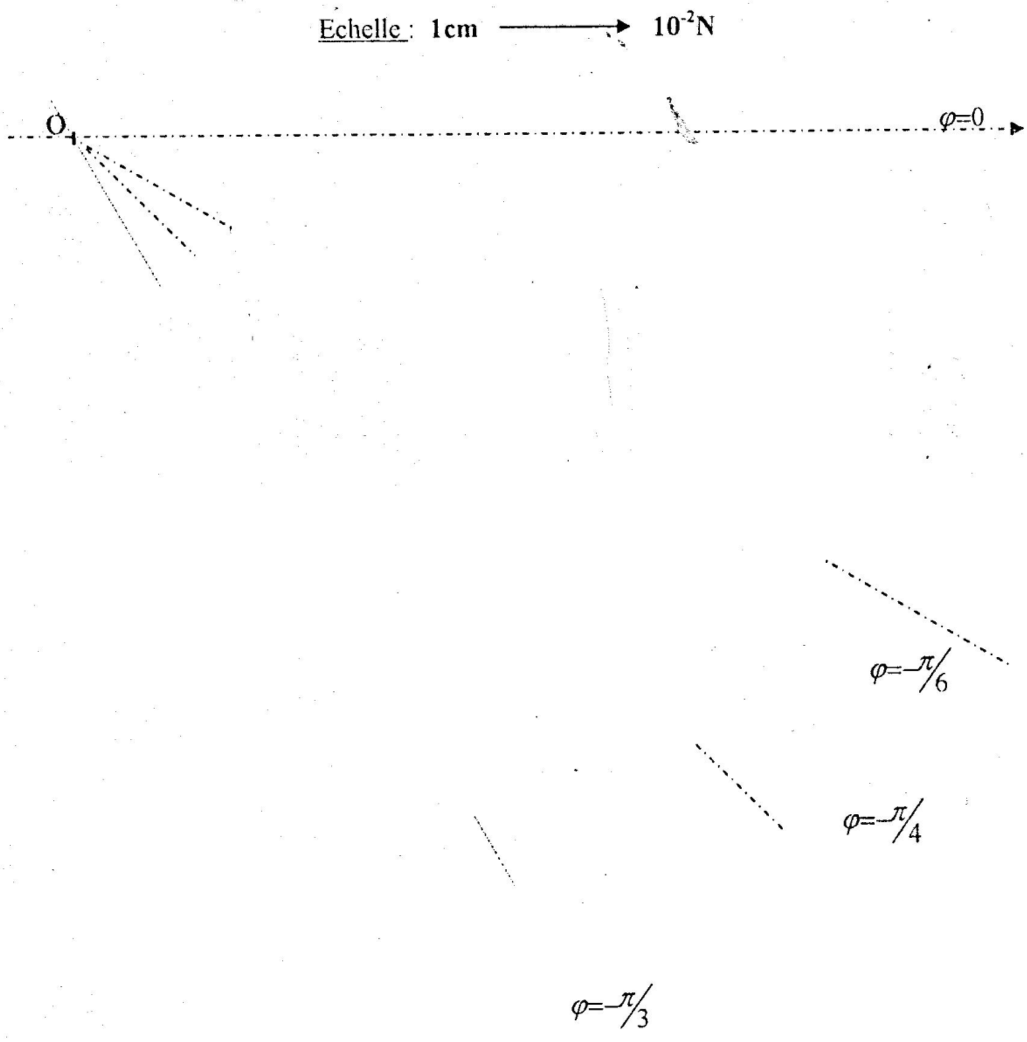
Calculer les valeurs de X_m , **K et m.**

- **e-** *Montre que l'oscillateur et en résonance d'élongation.*

4- *Pour une autre valeur* ω_2 *de* ω *on obtient,* $\vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$

- **a-** *De quel phénomène s'agit-il ?*
- **b-** *Déterminer pour cette pulsation* ω_2 *:*
  - *L'équation horaire du mouvement de **C**.*
  - *L'équation différentielle du mouvement. Conclure ?*




Echelle : 1cm → 10^{-2}N
O
$\varphi=0$
$\varphi=-\pi/6$
$\varphi=-\pi/4$
$\varphi=-\pi/3$