EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x)= \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x)= \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa courbe C_f

   c) En déduire que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K qu'on précisera.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1< \alpha < \sqrt{2}$

3) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

4) a) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

   b) Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$. En déduire $(f^{-1})'(\sqrt{2})$

   c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.

5) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque f^{-1} de f dans le même repère.

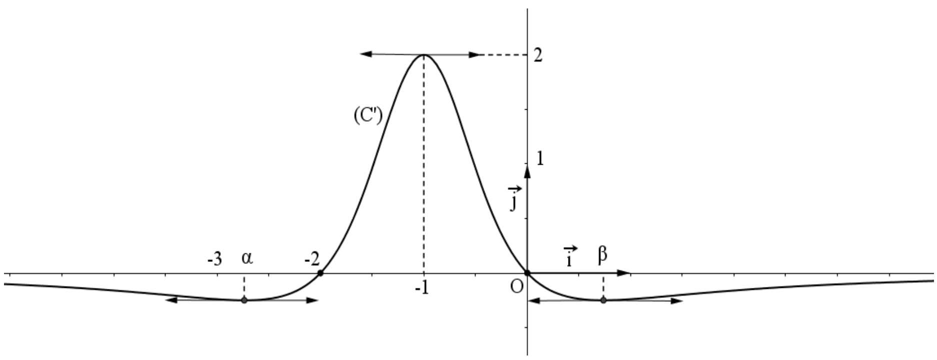
EXERCICE 2 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)= \sqrt{x^2+3x-4}$ On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O, \vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) Montrer que la droite D : $x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C)
4) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $(+\infty)$ une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.
5) Tracer la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.

EXERCICE 3 :

On donne ci-contre dans le repère $(O, \vec{i},\vec{j})$ la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur IR par : $f(x)= \frac{2(ax+b)}{x^2+2x+2}$ (où a et b sont deux réels).



La courbe (C') admet uniquement 3 tangentes horizontales et elle coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en exactement 2 points. On désigne par (C) la courbe représentative de f selon le repère orthonormé $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x)= \frac{-2ax^2-4bx+4a-4b}{(x^2+2x+2)^2}$

   b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(-1)$. En déduire que a=b=1

2) Par une lecture graphique :

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Justifier que les points de la courbe (C) d'abscisses α, β et -1 sont des points d'inflexion de (C).

3) Montrer que le point A(-1,0) est un centre de symétrie de la courbe (C).

4) On considère la fonction g : $x \longmapsto f(x)-x$

a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[0,+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution ω dans IR puis vérifier que $\omega \in \left]\frac{4}{5},1\right[$

5) Tracer la courbe (C) et la droite Δ : y=x dans le même repère $(0',\vec{u},\vec{v})$.

6) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle K qu'on précisera.

b) Tracer la courbe (Γ) de la fonction réciproque f^{-1} dans le repère $(0',\vec{u},\vec{v})$.

<u>EXERCICE 4</u> :

I/ Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)= 4x^3 + 3x - 1$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction g

2) Montrer que l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α dans IR et que $0 < \alpha < 1$

3) En déduire le tableau de signe de g(x) pour tout x∈IR.

II/ On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)= (x^3 - 1)\sqrt{x^2 + 1}$ On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)= \frac{x.g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation géométrique.

4) Tracer la courbe (C).

<u>EXERCICE 5</u> :

Soit la fonction f définie sur $[0,1[$ par $f(x)= \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$. (C) étant sa courbe selon un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. .

A/ 1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que $f'(x)= \frac{x^2+1}{2(1-x^2)^2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}$ pour tout $x \in]0,1[$.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) Tracer la courbe (C).

B/ 1) Montrer que f admet une fonction réciproque (qu' on notera f^{-1}) définie sur un intervalle J qu'on précisera.

2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J.

3) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x appartenant à J.

4) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1}.

C/ Soit la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par : $g(x)=\cos(x).f(\sin(x))$. Soit (Γ) sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

1) Montrer que pour tout réel x de $[0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $g(x)= \sqrt{\sin x}$

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

3) Etudier la dérivabilité de la fonction g sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

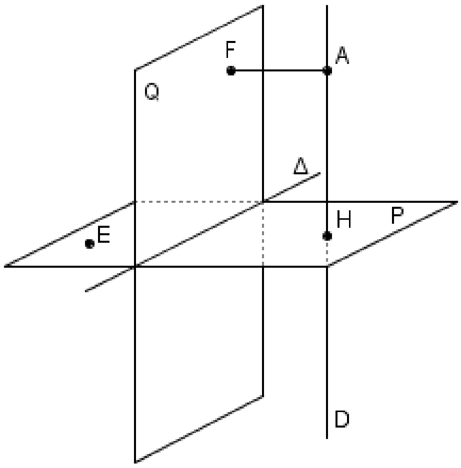
4) Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle K qu'on précisera.

5) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que $(g^{-1})'(x)= \frac{\sqrt{1-x^4}}{2x}$ pour tout réel $x \in K$

EXERCICE 6 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne la droite D définie par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $(\alpha \in IR)$.

1) Vérifier que la droite D passe par le point A(3,2,1) et en donner un vecteur directeur $\vec{u}$.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point E(0,2,1) et perpendiculaire à la droite D.
3) a) Déterminer les coordonnées du point H intersection de D et P.
   b) En déduire la distance du point A au plan P.
4) Soit le plan Q d'équation : $x + y - z + 1 = 0$.
   a) Vérifier que les plans P et Q sont perpendiculaires.
   b) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (notée Δ).
5) Calculer la distance d du point A au plan Q.
6) Soit F le projeté orthogonal de A sur le plan Q. Le plan (AFH) coupe la droite Δ en un point K.
   Calculer la distance AK.



EXERCICE 7 :

L'espace Ɛ étant muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On donne les points A(1,1,0), B(4,1,-1) et C(0,-1,-1).

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan P.
1) Soit la droite D : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4t \\ z = 2 - 6t \end{cases}$; $t \in IR$
   Montrer que D⊥P et déterminer leur point d'intersection K.
2) a) Vérifier que le point E(1,-2,0) n'appartient pas au plan P.
   b) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur P.

EXERCICE 8 :

Dans l'espace Ɛ muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le point A (2, 0,2) et les plans (P) : $2x - y + 4z - 11 = 0$ et (Q) : $x - 2y - z - 1 = 0$.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
   b) Donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection D.
2) Soit la droite Δ définie par : $\begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$
   a) Etudier la position relative des droites D et Δ.
   b) Déterminer une équation du plan (R) contenant la droite D et parallèle à la droite Δ.