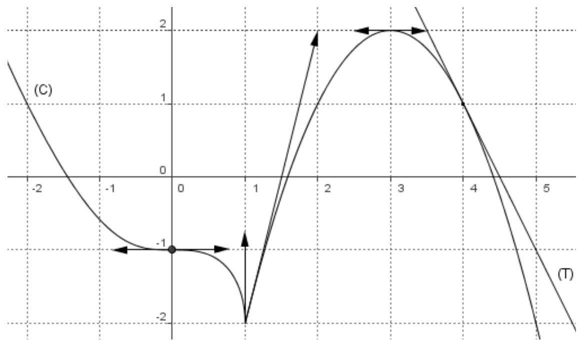
SERIE D'EXERCICES N°4
Dérivabilité d'une fonction

EXERCICE 1 :

Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR.



⁎ (T) est la tangente à (C) au point A(4,1).
⁎ Chaque flèche représente un vecteur directeur d'une demi-tangente.
⁎ La courbe (C) admet exactement deux tangentes horizontales.

1) Déterminer : $f'(0)$, $f_d'(1)$, $f'(3)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)+2}{x-1}$
2) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) a) Déterminer $f(4)$ et $f'(4)$ puis écrire une équation de la tangente (T).
   b) Déterminer une valeur approchée (à 10^{-3} prés) de chacun des réels $f(4{,}001)$.

5) Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)= 1+\sqrt{x}$
   a) Montrer que la fonction $f$og est dérivable en 9 et calculer $(f\text{og})'(9)$.
   b) Etudier la dérivabilité de la fonction g à droite en 0.
   c) Sachant que $f(x)= -x^2+6x-7$ pour tout $x \in [1,+\infty[$, montrer que la fonction $f$og est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $(f\text{og})'(x)$ pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$.

EXERCICE 2 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3+3x^2-9x+1$. (C) étant sa courbe selon un repère orthonormé.
1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.
2) a) Montrer que (C) admet un point d'inflexion A dont on précisera ses coordonnées.
   b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point A.
   c) Vérifier que $f(x)+12x=(x+1)^3$ puis étudier la position relative de la courbe (C) et la tangente T.

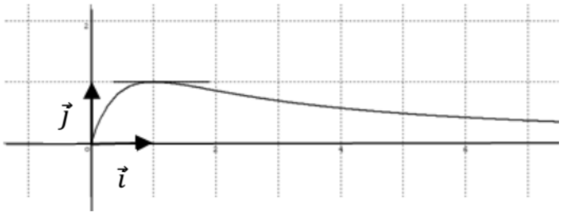
EXERCICE 3 :

Soit la fonction f définie sur [-3,+∞[par $f(x)= x\sqrt{2x+6}$ et (C) sa courbe selon un repère orthonormé du plan.
1) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-3). En déduire une interprétation géométrique
2) Montrer que f est dérivable sur]-3,+∞[et que $f'(x)=\frac{3x+6}{\sqrt{2x+6}}$ $\forall$ x∈]-3,+∞[.
3) Etablir le tableau de variation de f.
4) On considère dans le plan les points A(-1,-2) et B(1,3).
   a) Vérifier que la courbe (C) passe par les points A et B.
   b) Montrer que la courbe (C) admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB).

EXERCICE 4 :

Pour chacune des propositions suivantes répondre par vrai ou faux :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0\,,+\infty[$.
La courbe représentative de sa fonction dérivée f' dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est donnée par le graphique ci-contre.



Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

$a/$ f est décroissante sur $[1\,,+\infty[$.

$b/$ Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

$c/$ $\mathscr{C}$ a une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x\in[0,1] \\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative .

1) a) Etudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.
 b) Montrer que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.
2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1.
 b) Interpréter géométriquement les résultats trouvés en 3.a).
4) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.
5) Soit $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.
 a) Montrer que h est dérivable sur $]0,\,1[$.
 b) Dresser le tableau de variation de h.

EXERCICE 6 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction dérivée f' varie comme l'indique le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-1 $\nearrow$	2	$\searrow$ 0

<u>Répondre par **vrai** ou **faux**</u>

1. La courbe de f admet deux tangentes horizontales.
2. Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe de f.
3. Pour tous réels a et b , on a $|f(a)-f(b)|\le 2|a-b|$.
4. Si $f'(0)=f(0)=1$ alors $(f\circ f)'(0)=2$.