LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « $4^{\text{éme}}$ Sciences experimentales »	SERIE D'EXERCICES N°2 *Les suites réelles – Les équations dans $\mathbb{C}$*

EXERCICE 1 :

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 12$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$; $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq v_n$
3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.
4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 8v_n$
   a) Montrer que (t_n) est une suite constante.
   b) En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 2 :

1) a) Calculer $(2+i)^2$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 3(2+i)z + 2(3+4i) = 0$
2) Soit l'équation (E') : $z^3 - 2(3+2i)z^2 + (3+14i)z + 8 - 6i = 0$
   Montrer que l'équation (E') admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure z_1.
3) Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 2(3+2i)z^2 + (3+14i)z + 8 - 6i$
   a) Déterminer les complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - z_1)(az^2 + bz + c)$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').
4) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points A, B, C et D d'affixes respectifs : $z_A = 2 + i$, $z_B = 4 + 2i$, $z_C = 3 - i$ et $z_D = 6 + 3i$
   a) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
   b) Montrer que A, B et D sont trois points alignés.

EXERCICE 3 :

Soit l'équation (E) : $z^2 + 2(\sqrt{3} + i)z + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$

On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E).

1) a) Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que $|z_1.z_2| = 16$ et $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
   b) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure (notée z_1) que l'on déterminera.
   c) En déduire l'autre solution z_2 puis l'écrire sous la forme exponentielle.
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^4 + 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$

EXERCICE 4 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 2 = 0$
   b) Mettre les solutions sous la forme trigonométrique.
2) Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$. On considère l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{2i\theta} - 1 = 0$
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = 2e^{i\theta}$, $z_B = 1 + e^{i\theta}$ et $z_C = -1 + e^{i\theta}$
   a) Déterminer l'ensemble des points A quand θ varie dans $]0,\pi[$.

b) Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\frac{\theta}{2}}$ et que $z_C = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\frac{\pi+\theta}{2}}$

c) Montrer que OBAC est un rectangle.

d) Déterminer le réel θ de $]0,\pi[$ tel que OBAC soit un carrée.

EXERCICE 5 : (à la maison)

On considère les suites U et V définies sur IN par :

$U_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$ $\quad V_n = \frac{2}{U_n}$ et $\quad U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$.

1) Calculer : V_0 , U_1 , V_1 , U_2 et V_2 .
2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in IN$, on a : $\begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ et \\ 1 \leq V_n \leq 2 \end{cases}$
3) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)}$. [1] (On pourra remarquer que : $U_n.V_n = 2$).
4) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > V_n$.
5) Montrer que U est décroissante et que V est croissante.
6) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq 1$.
   En déduire que $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$. [2]
7) En utilisant les relations [1] et [2], montrer que, pour tout $n \in IN$, on a :
   $$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n).$$
   En déduire que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
8) Montrer que les deux suites U et V sont convergentes vers la même limite ℓ qu'on calculera.

EXERCICE 6 : (à la maison)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i)z + i = 0$

2) θ étant un réel de l'intervalle$]\,0,\frac{\pi}{2}[$.

   On considère l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta}cos\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$

   a) Montrer que $\left(2i.sin\theta.e^{i\theta}\right)^2 = 4e^{i2\theta}cos^2\theta - 4e^{i2\theta}$

   b) Montrer que : $2i.sin\theta.e^{i\theta} = e^{2i\theta} - 1$ et que $2e^{i\theta}cos\theta = e^{2i\theta} + 1$

   c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$). On donne les points A et B d'affixes respectifs 1 et $e^{2i\theta}$

   a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans $]0,\frac{\pi}{2}[$.

   b) Déterminer l'affixe du point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme, puis vérifier que OACB est un losange.

   c) Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire $\mathcal{A}$ du losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$ (indication : Montrer d'abord que $\mathcal{A} = sin2\theta$)