Exercice 1

A) On considère dans ℂ l'équation : **(E)** $2Z^2 - (\sqrt{3}+1)(1+i)Z + 2i = 0$.

1) Vérifier que : $[(\sqrt{3}+1)(1+i)]^2 - 16i = [(\sqrt{3}-1)(1-i)]^2$.

2) Résoudre dans ℂ l'équation **(E)** .

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexe **a** et **b** .

b) Vérifier que : $b^2 = a$.

c) Déduire les racines carrées du nombre complexes **a** .

2) Soit C le point d'affixe $c = a + b$

a) Placer les points A , B et C

b) Vérifier que : $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère dans ℂ l'équation : **(E ')** $Z^2 + Z - c = 0$.

a) Vérifier que **b** est une solution de **(E ')** .

b) On désigne par **d** l'autre solution de **(E ')** . Prouver que : $d = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.

c) Placer le point D d'affixe **d** .

Exercice 2

Soit dans ℂ l'équation (E) : $z^2 - (1+3i)z - 2 + i = 0$

1) Résoudre dans ℂ l'équation (E)

2) On pose $f(z) = z^3 - (2+3i)z^2 + (4i-1)z + 2 - i$

a) Montrer que l'équation f(z)=0 admet dans ℂ une solution réelle que l'on déterminera

b) Déterminer les complexes b et c tels que $f(z) = (z-1)(z^2+bz+c)$ ***quelque soit z ∈ℂ***

c) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$

3) Soit dans le plans muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

les points A ; B et C d'affixes respectives 1+2i ; i et 1.

a) placer les points A, B et C puis déterminer la nature du triangle ABC.

b) Déterminer l'aire du trapèze OBAC.

Exercice 3

1) La forme exponentielle de Z = (-2-2i) est $\begin{cases} 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \\ 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases}$

2) Une solution de l'équation $2z + \overline{z} + 3 - i = 0$ est $\begin{cases} 1+i \\ -1+i \\ 1-i \end{cases}$

3) Soit $Z = 1 + i\sqrt{3}$ alors $Z^3 = \begin{cases} 8 \\ 8i \\ -8 \end{cases}$

4) Soit A, B, C trois points muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'affixes respectives Z_A, Z_B, Z_C.

a) si $Z_C = Z_A + Z_B$ alors $\begin{cases} \text{A, B, C sont alignés} \\ \text{A est le milieu de [BC]} \\ \text{OACB est un parallèlogramme} \end{cases}$

b) Si $(Z_C - Z_A) = (3i)(Z_B - Z_A)$

alors $\begin{cases} \text{A, B, C sont alignés} \\ \text{A, B, C sont situés sur le cercle de diametre [BC]} \\ \text{le triangle ABC est rectangle en A} \end{cases}$

Exercice 4

Soit l'équation $(E): z^2 + (1-3i)z - 2i - 2 = 0$

On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

1) a- Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que $|z_1 \times z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_1 \times z_2) = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

b-Vérifier que $z_1 = 2i$ est une solution de (E)

c- En déduire l'écriture exponentielle puis l'écriture cartésienne de z_2

2) Soit $(E'): z^3 - (1+3i)z^2 - (4-4i)z + 2(2i+2) = 0$

a- Vérifier que 2 est une solution de (E')

b- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E')

3) Soit $(E_1): z^2 + 2e^{i\theta}z + e^{2i\theta} - 1 = 0$:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1)

4) Soit A, B et C les points d'affixes respectifs : $2e^{i\theta}$, $1+e^{i\theta}$ et $-1+e^{i\theta}$

a- Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle

b- Montrer que $OBAC$ est un rectangle

c-Déterminer le réel $\theta \in]0,\pi[$ tel que $OBAC$ est un carré

d- Soit I le centre du rectangle $OBAC$. Déterminer l'affixe du point D tel que $OIBD$ est un losange

e- Déterminer le réel $\theta \in]0,\pi[$ tel que l'aire du losange $OIBD$ égale a $\frac{1}{2}$

Exercice 5

A/ 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4\sqrt{2}.z + 16 = 0$. Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 - 4\sqrt{2}.z^2 + 16 = 0$ sous la forme exponentielle.

■ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) On donne les points $A(2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $B(-2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $C(2e^{-i\frac{\pi}{8}})$ et $D(-2e^{-i\frac{\pi}{8}})$.

Montrer que le quadrilatère ACBD est un rectangle et que son aire $\mathcal{A}=4\sqrt{2}$

B/ On considère l'équation (E_θ) : $i.z^2 + (2\sin\theta).z - i = 0$; où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

1) Montrer que $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ). En déduire l'autre solution z_2 de (E_θ).

2) On donne les points M_1 et M_2 d'affixes respectifs $e^{i\theta}$ et $(-e^{-i\theta})$

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) \equiv \pi - 2\theta[2\pi]$

b) Déterminer la valeur de θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour laquelle le triangle OM_1M_2 soit équilatéral.

Formulaire : $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$

Exercice 6

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i)z + i = 0$.

2) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E_\theta): z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{2i\theta} = 0$ (ou θ est un réel).

a) Vérifier que $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ)

b) En déduire l'autre solution z_2 de (E_θ)

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On considère les points M et M' d'affixes respectives z_1 et z_2 .

a) Vérifier que $\frac{z_2}{z_1}$ est imaginaire pur.

b) Montrer que $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$ le triangle OMM' est isocèle et rectangle en O.

Exercice 7

1)Verifier que : $[\, i\,(1 - e^{i\alpha})\,]^2 = -1 + 2e^{i\alpha} - e^{2i\alpha}$, $\alpha \in R$.

2) a)Resoudre dans C l'equation : $z^2 - 2i(1 + e^{i\alpha})z - 4e^{i\alpha} = 0$.

b)En deduire les solutions de l'equation :

$z^4 - 2i(1 + e^{i\alpha})z^2 - 4e^{i\alpha} = 0$.

3)On designe par A , B et C les points du plan complexe d'affixes respectives

2i , $\sqrt{3} - i$ et $2i\,e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0 , \pi]$.

a)Montrer que : $1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\frac{\alpha}{2}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

b)En deduire que : $z_A - z_C = 4\sin\frac{\alpha}{2}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

c)Determiner α pour que le triangle ABC soit isocèle de sommet principal A .

Exercice 8

1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0$

2) *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *on considère les points A et B d'affixes respectives* $z_A = 1+i$ *et* $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. *On désigne par* $\mathscr{C}$ *le cercle trigonométrique.*

a) Ecrire z_A *et* z_B *sous forme exponentielle*

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $\mathscr{C}$ *d'affixe* $e^{i\theta}$ *où* $\theta \in [0,2\pi]$

b) Montrer que $e^{2i\theta} - 1 = 2i\sin\theta\, e^{i\theta}$

c) Montrer que $MA \times MB = \left| e^{2i\theta} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\theta} \right|$. *En déduire que* $MA \times MB = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\theta\right)^2}$

d) En déduire qu'il existe un point M de $\mathscr{C}$*, dont on donnera l'affixe, pour lequel* $MA \times MB$ *est maximal.*

Et deux points M_1 *et* M_2 *de* $\mathscr{C}$*, dont on donnera les coordonnées, pour lequel* $MA \times MB$ *est minimal.*

Exercice 9

Pour tout réel θ de $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

$(E_\theta) : z^2 - 2(i + \cos\theta)z + 2i\cos\theta = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).
2) On désigne par désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives
   i , $z' = i + e^{i\theta}$ et $z'' = i + e^{-i\theta}$.
   a- Montrer que les points M' et M'' varient sur un même cercle que l'on précisera
   lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.
   b- On note I le milieu du segment [M'M''].
   Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.
3) a- Montrer que pour tout réel x on a : $i + e^{ix} = 2\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}$.
   b- Mettre alors z' et z'' sous forme exponentielle.
4) a- Montrer que AM'M'' est un triangle isocèle en A.
   b- Déterminer θ pour que le triangle AM'M'' soit équilatéral.

Exercice 10

Soit $\theta \in]0,\pi[$ et $(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

1. ***a)Montrer que : $1 + 2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$***
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_θ)
2. ***On donne $f(z) = z^3 - 4z^2 + 2(2 - i\sin\theta e^{i\theta})z + 4i\sin\theta e^{i\theta}$***
   a) Calculer f(2)
   b) Montrer que : $f(z) = (z-2)(z^2 + bz + c)$ où b et c deux nombres complexes à déterminer
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z)=0$
3. ***Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (0 ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)***

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives : 2 , $1-e^{i\theta}$ et $1+e^{i\theta}$

   a) Déterminer la forme exponentielle de z_B et z_C
   b) Montrer que : OBAC est un rectangle
   c) Déterminer θ pour que OBAC soit un carré