## Exercice 1

Soit la suite $(U_n)$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{U_n + 3} & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 2$

2) a – Montrer que $(U_n)$ est une suite croissante.

   b – En déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite

3) soit $(V_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$$

a- Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

b- Exprimer $(V_n)$ puis $(U_n)$ a l'aide $n$

c- Retrouver alors la limite de la suite $(U_n)$

## Exercice 2

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 4\left(\dfrac{U_n - 1}{U_n}\right) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 2$

5) a) Montrer que :

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n - 2)^2}{U_n}$$

b) En déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite

6) soit $(V_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$V_n = \frac{1}{U_n - 2}$$

a) Montrer que $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison $q = \dfrac{1}{2}$

b) Exprimer $(V_n)$ puis $(U_n)$ a l'aide $n$

c) Retrouver alors la limite de la suite $(U_n)$

## Exercice 3

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{6 - u_n}{4 - u_n}; & \text{pour tout n} \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n \prec 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{4 - u_n}$.

c) Montrer alors que la suite $(u_n)$ est croissante.

d) Déduire que $(u_n)$ est convergente.

2) Soit la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{2u_n - 6}{u_n - 2}$.

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprimer $v_n$ en fonction de n.

c) Déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{6\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{3 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

d) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

www.devoirat.net 2016

## Exercice 3

Soit la fonction $f$ définie sur $]1;+\infty[$ $par$ $f(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

1) a/Etudier les variations de $f$.

b/Montrer que pour tout $x \in [2\,;3], f(x) \in [2\,;3]$.

c/Montrer que pour tout $x \in [2\,;3], on\ a\ |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

2) a/Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]1;+\infty[$ et vérifier que $\alpha \in ]2\,;3[$.

b/Montrer que $(\alpha - 2)^2(\alpha - 1) = \frac{1}{4}$.

3) Soit la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2\sqrt{u_n - 1}} \end{cases}$

a/Montrer que pour tout $n \in IN,\ 2 \leq u_n \leq 3$.

b/Montrer que pour tout $\in IN$ ,$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c/En déduire que pour tout $n \in IN$, $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{4})^n$.

d/Déduire $\lim\limits_{n \to -\infty} u_n$.

## Exercice 4

On considère les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $V_0 = \frac{7}{2}$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $U_{n+1} = \frac{5U_n + V_n}{6}$ ,$V_{n+1} = \frac{U_n + 5V_n}{6}$ .

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $X_n = V_n - U_n$ .

a- Montrer que $(X_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b- Exprimer $(X_n)$ en fonction de n, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $U_n \leq V_n$ .

2) a- Etudier la monotonie de chacune des suites $(U_n)$ et $(V_n)$.

b- Prouver alors que les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ convergent vers la même limite L.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $Y_n = V_n + U_n$ .

a- Montrer que $(Y_n)$ est suite constante.

b- Déterminer alors L.

www.devoirat.net 2016