Exercice 1

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité

a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?

c. qu'il ait un test positif ?

d. qu'il ait un test négatif ?

3. Calculer la probabilité

a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?

b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

Exercice 2

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis.
On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.
On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

– F l'événement « le membre choisi est une femme »,
– T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$.
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
   Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Exercice 3

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2^{e} niveau et 100 vont au 3^{e} niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2^{e} niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

– N_1 : « La personne va au premier niveau. »
– N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
– N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
– E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Montrer que la probabilité que la personne aille au 2^{e} niveau par l'escalier est égale à $\dfrac{1}{12}$.
   b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.
   c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2^{e} niveau.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2^{e} niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2^{e} niveau.

c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2^{e} niveau ?

Exercice 4

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.

On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{3}{5}$ **Réponse B :** $\frac{4}{5}$ **Réponse C :** $\frac{3}{50}$ **Réponse D :** $\frac{6}{25}$

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{21}{50}$ **Réponse B :** $\frac{33}{50}$ **Réponse C :** $\frac{3}{5}$ **Réponse D :** $\frac{12}{25}$

c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

Réponse A : $\frac{4}{11}$ **Réponse B :** $\frac{6}{25}$ **Réponse C :** $\frac{7}{11}$ **Réponse D :** $\frac{33}{50}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.

Les boules sont indiscernables au toucher.

L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

Réponse A : $\frac{11}{81}$ **Réponse B :** $\frac{2}{7}$ **Réponse C :** $\frac{5}{84}$ **Réponse D :** $\frac{4}{63}$

b. La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

Réponse A : $\frac{2}{7}$ **Réponse B :** $\frac{1}{7}$ **Réponse C :** $\frac{1}{21}$ **Réponse D :** $\frac{79}{84}$

c. On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.

Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

Réponse A : 76 **Réponse B :** 71 **Réponse C :** 95 **Réponse D :** 94

Exercice 5

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.
Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a. On considère un lot de 10 ordinateurs.
Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 6

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.
Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

a. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

b. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 7

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 8

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. **a.** Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.
Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.

Exercice 9

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement -1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher. On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac. Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés. À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ le point M de coordonnées (x, y, z).
Sur le graphique joint en annexe, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On note $\mathscr{C}$ le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\dfrac{1}{64}$.

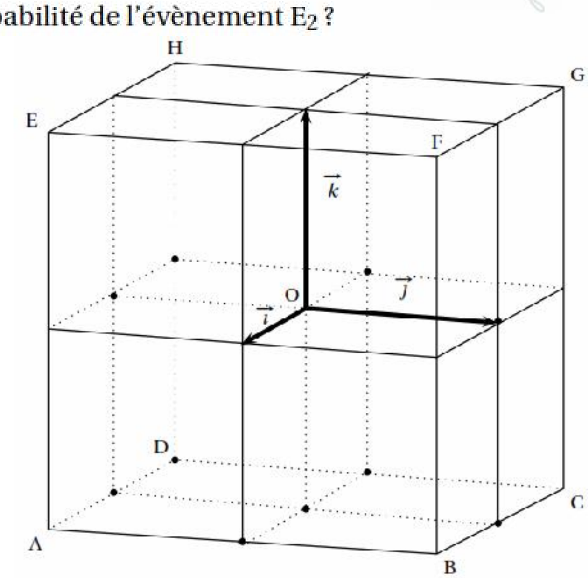
2. On note E_1 l'évènement : « M appartient à l'axe des abscisses ».
Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\dfrac{1}{4}$.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}\ (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

b. Tracer en couleur sur le graphique de l'annexe, la section du plan $\mathscr{P}$ et du cube $\mathscr{C}$. (On ne demande pas de justification).

c. On note E_2 l'évènement : « M appartient à $\mathscr{P}$ ».
Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?



Exercice 10

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A $\frac{1}{56}$ B $\frac{1}{120}$ C $\frac{1}{3}$

b. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

A. $\frac{11}{56}$ B. $\frac{11}{120}$ C. $\frac{16}{24}$

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a. La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

A. $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3$ B. $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ C. $\left(\frac{1}{5}\right)^5$

b. La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A. $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$ B. $2 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{3}{8}$ C. $10 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

Exercice 11

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$. La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est $\frac{1}{2}$.

On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'un évènement A est notée $p(A)$. On désigne par $\overline{A}$ l'évènement contraire de A. La probabilité conditionnelle de A sachant que l'évènement B est réalisé est notée $p(A/B)$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :
soit T l'évènement : « la pièce est truquée »,
soit P l'évènement : « on obtient PILE ».

a. Calculer la probabilité d'obtenir « Pile » (on pourra s'aider d'un arbre).

b. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « PILE » ?

2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.

– si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce,
– dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.

On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».

a. Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?

b. Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?

c. Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?