Résumé : *Similitudes*
Niveau : *Bac mathématiques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Définition : *"Homothétie"*

Soit I un point et k un réel non nul.

On appelle **homothétie** de centre I et de rapport k, l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

Théorème : *"Propriété caractéristique d'une homothétie"*

Soit k un réel non nul et différent de 1.

Une application f est une homothétie de rapport k, si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Théorème :

Toute homothétie conserve les mesures des angles orientés.

Théorème :

La composée de deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 est une homothétie de rapport k_1k_2 si $k_1k_2 \neq 1$, une translation si $k_1k_2 = 1$.

Théorème :

La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ est une homothétie de rapport k.

Théorème : *"Homothétie et nombres complexes"*

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

L'application f est une homothétie de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que $z' = kz + b$. De plus, l'affixe z_A du centre A de l'homothétie f vérifie $z_A = \frac{b}{1-k}$.

Définition : *"Similitude"*

Soit k un réel strictement positif.

On appelle **similitude** de rapport k, toute application du plan dans lui-même telle que pour tous points A et B d'images respectives A' et B' , $A'B' = kAB$.

Exemples :

Les isométries sont des similitudes de rapport 1.

Toute homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Théorème :

La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport kk'.

Théorème :

Une application du plan dans lui-même est une similitude, si et seulement si, elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Théorème :

Pour tous points A, B, C et D, d'images respectives A', B', C' et D' par une similitude de rapport k : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Propriétés :

- Une similitude de rapport k est une bijection et sa réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
- Une similitude conserve les angles géométriques.
- Une similitude conserve l'orthogonalité.
- Une similitude conserve l'alignement et le barycentre.
- Une similitude transforme un segment en un segment.
- Une similitude transforme une droite en une droite.
- Une similitude conserve le parallélisme.
- Une similitude transforme un cercle en un cercle et conserve le contact.
- Soit A, B, C, D, E, F des points du plan et A', B', C', D', E', F' leurs images respectives par une similitude.

  Si $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CD} + b\overrightarrow{EF}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{C'D'} + b\overrightarrow{E'F'}$

Théorème :

Deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés coïncident sur tout le plan.

Propriétés :

Soit f, g et h trois similitudes.

- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
- $f = g$, si et seulement si, $h \circ f = h \circ g$.

Définition : *"Similitude directe – Similitude indirecte"*

On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Conséquence :

Toute similitude directe conserve les mesures des angles orientés.

Toute similitude indirecte change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Théorème :

- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
- La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
- La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

Théorème :

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.

Il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.

Théorème : *"Angle d'une similitude directe"*

Soit f une similitude directe et A, B, C et D des points tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$.

Soit A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par f.

Alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}\right)$ $[2\pi]$.

En désignant par θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$, on dit que f est une similitude directe d'angle θ.

Théorème :

Soit f et g deux similitudes directes d'angles respectifs θ et θ'.

- La similitude directe $f \circ g$ est d'angle $\theta + \theta'$.
- La similitude directe f^{-1} est d'angle $-\theta$.

Théorème : *"Centre d'une similitude directe"*

Toute similitude directe de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Conséquence :

Une similitude directe de rapport différent de 1 est parfaitement déterminée par la donnée de son centre, son rapport et son angle.

Le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.

Une application f est une similitude directe de rapport $k \neq 1$, de centre I et d'angle θ, si et seulement si, pour tout point M distinct de I d'image M' :

$$IM' = k \cdot IM \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}\right) \equiv \theta[2\pi].$$

Théorème : *"Forme réduite d'une similitude directe"*

Toute similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ se décompose sous la forme $f = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre I et de rapport k et r est la rotation de centre I et d'angle θ. Cette décomposition s'appelle forme réduite de f.

Théorème : *"Similitude directe et nombres complexes"*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

L'application f est une similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = az + b$, avec $a = ke^{i\theta}$ et $z_I = \dfrac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.

Théorème : *"Centre d'une similitude indirecte"*

Une similitude indirecte de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Théorème : *"Forme réduite d'une similitude indirecte"*

Soit f une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$ et h l' homothétie de centre I et de rapport k. Il existe une droite D telle que f se décompose de manière unique sous la forme $f = h \circ S_D = S_D \circ h$, où S_D est la symétrie orthogonale d'axe D.
Dans ce cas, la droite D est l'ensemble des points M tels que $\overline{IM'} = k\overline{IM}$, où $M' = f(M)$.
Cette décomposition est appelée forme réduite de f.
La droite D est appelée axe de la similitude indirecte f.

Conséquences :

Une similitude indirecte de rapport différent de 1, est parfaitement déterminée par son rapport, son centre et son axe, qui sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.
L'axe D d'une similitude indirecte f de centre I et la perpendiculaire à D passant par I sont globalement invariants par f.
Si f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k alors $f \circ f$ est une homothétie de centre I et de rapport k^2.

Propriété :

Soit f une similitude indirecte de centre I, de rapport différent de 1 et d'axe D.
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, alors $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IM'}}\right) \equiv -\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IM}}\right)\ [2\pi]$, pour tout M distinct de I, d'image M'. La droite D porte donc la bissectrice intérieure de $\widehat{MIM'}$.

Théorème : *"Similitude indirecte et nombres complexes"*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
L'application f est une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = a\bar{z} + b$.
Dans ce cas : $k = |a|$ et $z_I = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ est l'affixe du point I.