Résumé : *Fonctions réciproques*
Niveau : *Bac mathématiques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Définition : *"Bijection"*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que f réalise une **bijection** de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout $y \in f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

Théorème :

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Définition : *"Fonction réciproque"*

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.
On appelle **fonction réciproque** de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout $y \in f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$.

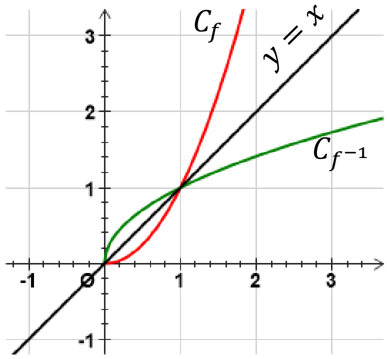
Conséquence :

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.
Pour tout $x \in I$ et tout $y \in f(I)$:

- $f(x) = y$ équivaut à $f^{-1}(y) = x$.
- $f^{-1} \circ f(x) = x$.
- $f \circ f^{-1}(y) = y$.

Conséquence :

Les courbes représentatives d'une bijection f et de sa fonction réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Théorème :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f.

Théorème :

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$, $a \in I$ et $b = f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'(a)}$$

Corollaire :

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

Si f est dérivable sur I et si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et pour tout $y \in f(I)$:

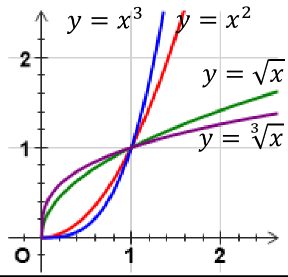
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Théorème et définition : *"Fonction racine n^{ième}"*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \longmapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine $n^{ème}$.



Notation :

L'image d'un réel positif x par la fonction racine n^{ième} est notée $\sqrt[n]{x}$ et se lit : "racine n^{ième} de x"

Lorsque $n = 2$ et pour x positif, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Conséquence :

Pour tous réels positifs x et y : $y = x^n$ si et seulement si $x = \sqrt[n]{y}$.

Conséquence :

Soit n et p deux entiers tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b.

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$ 2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ 3) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ 4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

4) $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$ 6) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$ 7) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

<u>Conséquence</u> :

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pour tout $x > 0$.

<u>Théorème</u> :

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier naturel $n \geq 2$.

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. De plus, $f'(x) = \frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}\right)}$ pour tout x de I tel que $u(x) > 0$.