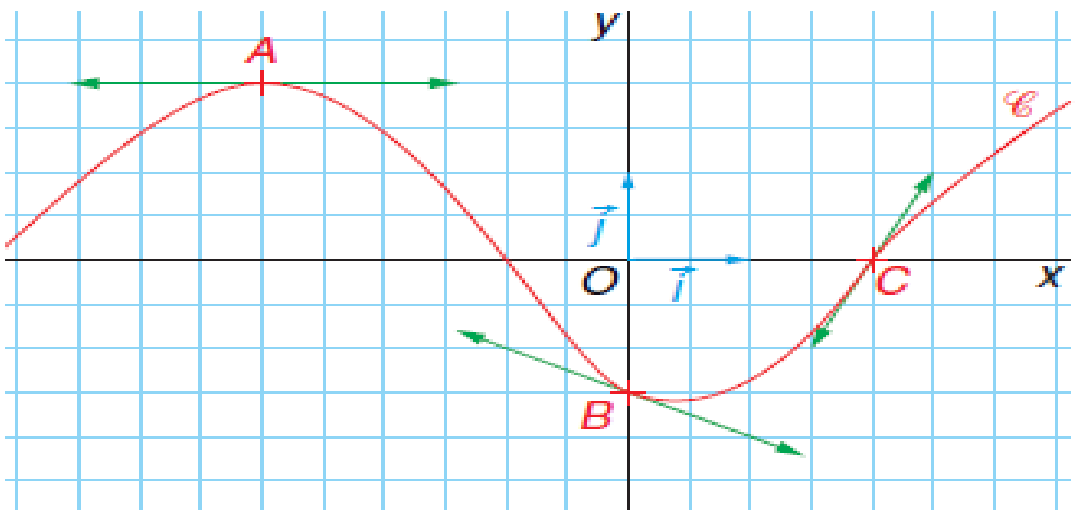
EXERCICE ❶

($4pts$)

1. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé (ξ_f) la courbe d'une fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, et ses tangentes aux points A, B et C d'abscisses respectives -3 , 0 et 2.



1. Donner par lecture graphique
   (a) $f(0)$, $f(-1)$ et $f(-3)$.
   (b) $f'(-3)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
2. (a) Donner une équation de la tangente T à (ξ_f) au point B.
   (b) Déterminer $f([-3,2])$
3. (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{\cos^2(x)+1}{x}\right)$

EXERCICE ❷

($4pts$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x-1-\sin x & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   (a) Montrer que $f(x) \geq 2x-2$ pour tout $x \geq 0$
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Etudier la dérivabilité de f en 0

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

EXERCICE ❸

(5*pts*)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.
   (a) Montrer par récurrence que $0 \leq u_n < 1, \forall\ n \in \mathbb{N}$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.Préciser la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer v_n , pius u_n en fonction de n.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
3. Déterminer un entier N tel que , pour tout $n \geq N$: $u_n > 0.99$

EXERCICE ❹

(7*pts*)

1. (a) Vérifier que $-1 + i\sqrt{3}$ est une racine cubique de 8.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8$
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$
   (a) Ecrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.
   (b) Montrer que $z_A^{2016} \in \mathbb{R}_+$
   (c) PLacer les points A, B et C dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec précision.
3. (a) Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.
4. Soit les points D et E d'affixes respectives $z_D = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_E = 1 + z_D^2$
   (a) Montrer que $D \in \xi(A', 1)$ avec $z_{A'} = 1$
   (b) Déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'D}}\right)$ .Placer le point D.
5. (a) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $z_D - z_{A'}$ et $z_E - z_{A'}$.
   (b) En déduire que les points A', D et E sont alignés.Placer le point E.