Exercice n°1 : (7 points)

On considère dans C l'équation (E) : $z^2-2(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}z+4e^{i\frac{7\pi}{6}}=0$

1) a) Vérifier que $z_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de (E).

b) Déduire l'autre solution de (E).

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $Z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $Z_B=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $Z_C=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

a) Construire les points A et C.

b) Vérifier que $\dfrac{Z_C}{Z_A}=i$ puis déduire la nature du triangle OAC.

c) Ecrire (1-i) sous forme exponentielle puis déduire que : $(1-i)Z_A=Z_B$

d) Montrer que OBAC est un parallélogramme puis construire le point B.

3) a) Ecrire Z_B sous forme algébrique.

b) Déduire les valeurs de $Cos\dfrac{\pi}{12}$ et $Sin\dfrac{\pi}{12}$

4) Construire le cercle (C) de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.La perpendiculaire à (OB) passant par O coupe le cercle (C) en un point D d'affixe Z_D dont <u>sa partie imaginaire est positive</u>.

a) Justifier que $Z_D = i\,Z_B$.

b) Montrer que OAD C est un carré.

Exercice n°2 : (7 points)

Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-1 & si\ \ x\geq 0\\ \dfrac{xCosx}{x^2+1}-1 & si\ \ x\prec 0\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,0[$ on a : $\dfrac{x}{x^2+1}-1\leq f(x)\leq\dfrac{-x}{x^2+1}-1$

b) Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) a) Monter que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

b) Calculer ces limites :

$\lim\limits_{x\to1^+} f(\dfrac{x-2}{x-1})$ $\qquad\lim\limits_{x\to+\infty} f(\dfrac{x}{x^2+1})$ $\qquad\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2+1)$

4) On suppose que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

a) Montrer l'équation f(x) =0 admet dans $[0,+\infty[$ une unique solution α dans $[0,+\infty[$ puis vérifier que : $0{,}57 < \alpha < 0{,}58$

b) Déduire le tableau de signe de f(x) sur $[0,+\infty[$

c) Montrer que α vérifie $\sqrt{\alpha^2+1} = 2\alpha$

5) On considère les deux fonctions g et h définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ et h(x) =2x.

a) Vérifier que pour tout $x \in [0,+\infty[$: $f(x) = \dfrac{h(x) - g(x)}{g(x)}$

b) Etudier la position relative des courbes des fonctions g et h sur $[0,+\infty[$.

<u>Exercice n°3 :</u> (6 points)

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{2+U_n}$

1) a) Montrer que pour tout n on a : $0 \le U_n \le 2$.

b) Montrer que (U_n) est décroissante.

c) Déduire que (U_n) est convergente puis calculer sa limite.

d) Montrer par récurrence que pour tout n on a : $U_n = \dfrac{2}{n+1}$

2) Soit la suite (S_n) définie sur IN par :

$$S_n = \sum_{K=0}^{n} (-1)^K U_K = U_0 - U_1 + U_2 - U_3 + \dots + (-1)^n U_n$$

a) Montrer que : $S_{2n+2} - S_{2n} = U_{2n+2} - U_{2n+1}$ puis déduire que la suite (S_{2n}) est décroissante.

b) Montrer que la suite (S_{2n+1}) est croissante.

c) Montrer que pour tout n on a : $S_{2n+1} \le S_{2n}$

d) Déduire que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

e) Déduire que la suite (S_n) converge vers un réel L puis vérifier que $1 \le L \le 2$.

<u>Bon travail</u>