Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 1	4 Mathématiques
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	08 - 11 - 2016

EXERCICE N : 1 (4.5 points)

On considère les suites réelles (U_n) , (V_n) et (S_n) définies sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + V_n}{3} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} V_0 = 12 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad S_n = V_n - U_n \ .$$

1) a) Montrer que (S_n) est une suite géométrique .

b) Exprimer alors , S_n en fonction de n puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $U_n < V_n$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante sur IN .

c) Justifier que les deux suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite ℓ .

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $3U_n + 4V_n = 48$.

b) Déduire alors la valeur de ℓ .

EXERCICE N : 2 (5 points)

A) 1) Montrer que l'équation **(E)** : $x^3 + 6x - 2 = 0$ admet dans IR une unique solution α .

2) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

B) On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de α .

1) On considère dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes **(E_1)** : $Z^3 = -2$ et **(E_2)** : $Z^3 = 4$.

a) Justifier que les solutions de **(E_1)** sont : $a_1 = -\sqrt[3]{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $a_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) Justifier que les solutions de **(E_2)** sont : $b_1 = \sqrt[3]{4}$, $b_2 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $b_3 = \sqrt[3]{4}\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

c) Vérifier que : $a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = -2$.

2) Soient a et b deux nombres complexes vérifiant : $a^3 + b^3 = 2$ et $ab = -2$.

a) Vérifier que $(a + b)$ est une solution de l'équation **(E ')** : $Z^3 + 6Z - 2 = 0$.

b) Déduire alors dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation **(E ')** .

c) Conclure .

EXERCICE N : 3 (5.5 points)

A) *Prouver que la fonction* **tan** *est une bijection de* $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ *sur IR .*

B) *Soit n un entier* **naturel non nul** *et* f_n *la fonction définie sur* $[\,0\ ;\ \frac{\pi}{2}\,[$ *par :* $f_n(x) = x + n - n\tan x$

1) a) *Justifier que* f_n *est strictement décroissante sur* $[\,0\ ;\ \frac{\pi}{2}\,[$ *.*

b) *En déduire que l'équation :* $f_n(x) = 0$ *admet une unique solution* α_n *dans* $[\,0\ ;\ \frac{\pi}{2}\,[$ *.*

c) *Vérifier que* $\alpha_n \in \,]\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ *et que* $\tan(\alpha_n) = 1 + \frac{\alpha_n}{n}$ *.*

2) *On définit sur IN* la suite* (α_n) *.*

a) *Montrer que pour tout* $n \in IN^*$; $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ *.*

b) *Déduire que la suite* (α_n) *est décroissante sur IN * .*

c) *Prouver que la suite* (α_n) *est convergente et déterminer sa limite .*

EXERCICE N : 3 (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$*, on considère le point A d'affixe (- 1) et les points M , N et P d'affixes respectives* Z , Z^2 *et* Z^3 *où Z est un nombre complexe non nul différent de (- 1) et 1 .*

1) *Montrer que (le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si (* $\frac{1+Z}{Z}$ *est imaginaire pur) .*

2) *Soit* $(\mathcal{C})$ *l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit rectangle en P .*

a) *On pose :* $Z = x + iy$ *où x et y sont des réels . Ecrire* $\frac{1+Z}{Z}$ *sous forme cartésienne .*

b) *Déduire que* $(\mathcal{C})$ *est le cercle de diamètre [OA] privé des points O et A .*

3) *Dans la figure de l'annexe ci-jointe ,on a tracé le cercle* $(\mathcal{C})$ *et on a placé un point M d'affixe Z sur* $(\mathcal{C})$ *et son projeté orthogonal H sur l'axe* $(O, \vec{u})$ *.*

On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives Z^2 *et* Z^3 *tels que MNP soit rectangle en M .*

a) *Montrer que :* $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})\ (2\pi)$ *puis que* $(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})\ (2\pi)$ *.*

b) *Montre que :* $OH = OM^2$ *.*

c) *Donner un procédé de construction des points M et P puis les construire .*

Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie