Résumé : *Dérivabilité*
Niveau : *Bac sciences expérimentales*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Définition : *"Dérivabilité en un point "*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable en x_0**, si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivée** de f en x_0, on le note $f'(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé :

Si f est dérivable en x_0, alors sa courbe représentative admet au point $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ admet une tangente de coefficient directeur (ou pente) $f'(x_0)$, de vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{f'(x_0)}$ et a pour équation : $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

Définition : *"Approximation affine"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $x_0 \in I$.

Pour h voisin de 0, le réel $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une **approximation affine** (valeur approchée) de $f(x_0 + h)$. On écrit : $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.

Définition : *"Dérivabilité à droite en un point"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable à droite en x_0**, si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivée à droite** de f en x_0, on le note $f'_d(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé à droite :

Si f est dérivable à droite en x_0, alors sa courbe représentative admet au point $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ admet une demi-tangente de coefficient directeur $f'_d(x_0)$, de vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{f'_d(x_0))}$ et a pour équation : $\boldsymbol{y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ avec $x \geq x_0$.

Définition : *"Dérivabilité à gauche en un point"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable à gauche en x_0**, si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivée à gauche** de f en x_0, on le note $f'_g(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé à gauche :

Si f est dérivable gauche en x_0, alors sa courbe représentative admet au point $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ admet une demi-tangente de coefficient directeur $f'_g(x_0)$, de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ f'_g(x_0) \end{pmatrix}$ et a pour équation : $\boldsymbol{y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ avec $x \leq x_0$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

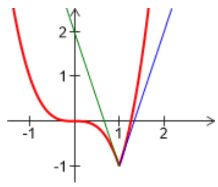
f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Définition : *"Point anguleux"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors le point $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un **point anguleux**.



Définition : *" Dérivabilité sur un intervalle "*

- Une fonction définie sur un intervalle ouvert I est dérivable sur I ($]a, b[$, $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$) si elle est dérivable en tout réel de I.
- Une fonction est dérivable sur $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b.
- Une fonction est dérivable sur $[a, b[$ (resp. sur $[a, +\infty[$) si elle est dérivable sur $]a, b[$ (resp. $]a, +\infty[$) et à droite en a.
- Une fonction est dérivable sur $]a, b]$ (resp. sur $]-\infty, b]$) si elle est dérivable sur $]a, b[$ (resp. $]a, +\infty[$) et à gauche en b.

Dérivées des fonctions usuelles :

$\boldsymbol{f(x)} =$	**Intervalle**	$\boldsymbol{f'(x)} =$
a (constante)	$\mathbb{R}$	0
$x^n, n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$a\,cos(ax+b)$
$cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-a\,sin(ax+b)$
$tg(ax+b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f	$a[1+tg^2(ax+b)] = \frac{a}{cos^2(ax+b)}$
$cotg(ax+b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f	$-a[1+cotg^2(ax+b)] = -\frac{a}{sin^2(ax+b)}$

Opérations sur les fonctions dérivées :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$a\,u$	I	$a\,u'$
$u+v$	I	$u'+v'$
$u\cdot v$	I	$u'v+uv'$
$u^n\ ,\ n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$	I	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\frac{1}{v}$	Tout intervalle inclus dans $\{x\in I\ tel\ que\ v(x)\neq 0\}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	Tout intervalle inclus dans $\{x\in I\ tel\ que\ v(x)\neq 0\}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\frac{1}{v^n}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x\in I\ tel\ que\ v(x)\neq 0\}$	$-n\,v'\,v^{-n-1}$

Définition : *"Dérivée n^{ième}"*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée.

Si la fonction f' est dérivable sur I, alors f est dite **deux fois dérivable** sur I et la fonction dérivée de f', notée $\boldsymbol{f}$", est appelée la **fonction dérivée seconde** de f.

Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ $(n\geq 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée $n^{ième}\ de$ f et est notée $f^{(n)}$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction $g\circ f$ est dérivable en a et on a : $(g\circ f)'(a)=f'(a)\cdot g'\big(f(a)\big)$

Corollaire 1 :

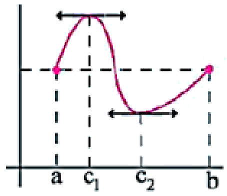
Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors la fonction $g\circ f$ est dérivable sur I et $(g\circ f)'(x)=f'(x)\cdot g'\big(f(x)\big)$ pour tout $x\in I$.

Corollaire 2 :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f(x)>0$ pour tout $x\in I$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{\boldsymbol{f}}\right)'(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{2\sqrt{f(x)}}}$ pour tout $x\in I$.

Théorème de Rolle :

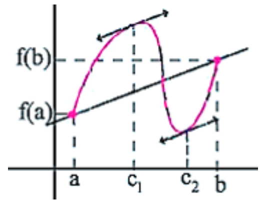
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$.
Alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à l'axe des abscisses.

Théorème des accroissements finis :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives a et b.

Inégalité des accroissements finis :

Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Soit m et M deux réels.
Si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$, alors : $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$.

Corollaire :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $k>0$.
Si $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$, alors $|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$ pour tous réels a et b de I.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement décroissante sur I.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Si f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $]a, b[$, alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[a, b]$.
- Si f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $]a, b[$, alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$.

Définition : *"Extremum"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

- On dit que f admet un maximum local en x_0 ($f(x_0)$ est ce maximum), s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I contenant x_0 tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in J$.
- On dit que f admet un minimum local en x_0 ($f(x_0)$ est ce minimum), s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I contenant x_0 tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in J$.

Un maximum ou un minimum s'appelle aussi un extremum.

Théorème :

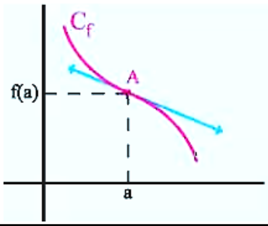
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 et change de signe, alors f ad met un extremum local en x_0 égal à $f(x_0)$.

Définition : *"Point d'inflexion"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel x_0 de I.

Le point $I\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un **point d'inflexion** de la courbe C_f de f si C_f traverse sa tangente en ce point.



Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point $I\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.