Exercice N°1 : (4pts)

A*Pour chacune des propositions suivantes une seule est exacte le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant : $|z| + \bar{z} = 1 - 2i$ alors la valeur de z est :

a. $-\frac{3}{2} + 2i$ **b.** $-\frac{3}{2} - 2i$ **c.** $\frac{3}{2} + 2i$

2) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ, et $z' = \frac{\sqrt{3}-i}{-2\bar{z}}$ alors :

a. $\arg(z') \equiv \frac{-\pi}{3} + \theta[2\pi]$ **b.** $\arg(z') \equiv \frac{5\pi}{6} - \theta[2\pi]$ **c.** $\arg(z') \equiv \frac{5\pi}{6} + \theta[2\pi]$

B* Pour chacune des affirmations suivantes répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+sinx}{x+sin2x} = 1$

2) l'ensemble des solutions de l'équation $z^5 = 4 + 4i$ sont les nombres complexes

$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{5})}$ $ou\ k \in \{0,1,2,3,4\}$

Exercice N°2 : (6pts)

Dans le plan P complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 ou a est nombre complexe différant de 1.On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et f l'application de$P\backslash\{B\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z'tels que : $z' = \frac{z-a}{z-1}$

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation

$$(E): z^2 - 2z + a = 0$$

2) On prend $a = 1 + e^{i2\theta}, ou\ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

b. Mettre chacune de solutions de (E) sous forme exponentielle

3) On note $M_1\ et\ M_2$ les points d'affixes respectives $z_1 = 1 + ie^{i\theta}\ et\ z_2 = 1 - ie^{i\theta}, ou\ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

a. Déterminer et construire les ensembles décrits par$M_1\ et\ M_2$ quand $\theta\ varie\ dans\ \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

b. Montrer que pour tout $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ le triangle OM_1M_2 est rectangle en O

c. Déterminer θ dans pour que $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ le triangle OM_1M_2 soit isocèle

4) On suppose dans cette question que : $a = -1$.

a. Montrer que z' est imaginaire si et seulement si $|z| = 1$. Expliciter z' lorsque : $z = e^{i\theta}$.

b. Montrer que : $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM'}}\right) \equiv 0[2\pi]$

c. Déterminer alors la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$.

d. En déduire la constriction du point M' image d'un point M donné de $\mathscr{C}\backslash\{B\}$

Exercice N°3 : (4pts)

1) On donne deux suites $(u_n)\ et\ (v_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*\ par$:

$v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k+n}}$ et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \cos(\frac{1}{\sqrt{k+n}})$

a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $et\ pour\ tout\ k \in \{1,2,3,\dots,n\} on\ a$: $\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, on\ a$: $\frac{\sqrt{2n}}{2} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n}$

2) On considère la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $par\ f(x) = x - 1 + cosx$.

Etudier les variations de f et montrer que :$1 - x \leq cosx \leq 1$ $pour\ tout\ x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3) **a.** Vérifier que $1 - \frac{1}{\sqrt{k+n}} \leq \cos(\frac{1}{\sqrt{k+n}}) \leq 1$ et que $1 - \frac{v_n}{n} \leq u_n \leq 1$

b. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice N°4 : (6pts)

Dans la figure suivante on a représenté dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\vec{j}\ )$la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et une droite D d'équation $D: y = 1$.

∗La droite D est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

∗ La courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j}) au\ voisinage\ de\ (+\infty)$

1) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ $et \lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$

2) **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$

b. Etudier chacune des limites suivantes $\lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{\alpha x-2}{x+1}\right)$ et $\lim_{x\to\alpha} \frac{1-\cos(f(x))}{f^2(x)}$.

c. Donner le signe $de\ f(x) suivant\ les\ valeurs\ de\ x$

d. Déterminer $f(]-\infty,0]$, $f([0,+\infty[$ et $f(]-\infty,+\infty[$

3) On donne une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ x \leq 0 \\ g(x) = a\frac{\sin(\sqrt{x+4}-2)}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$ ou $a \in \mathbb{R}$

a. Montrer que : $\forall x > 0, |g(x)| \leq \frac{|a|}{x}$, en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b. Déterminer $\lim_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to0^-} g(x)$.

c. Déterminer le réel a pour que g soit continue en 0.

d. En déduire le domaine de continuité de g pour la valeur de a trouvé