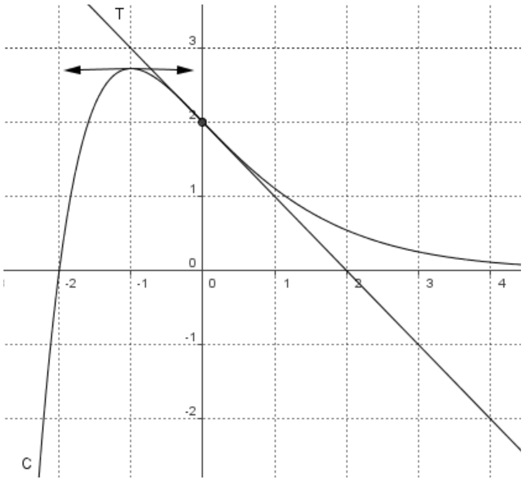
LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: HANNACHI SALAH
« 4^{EME}TECHNIQUE »

2015/2016

SERIE D'EXERCICES N°15

Révision de l'analyse

EXERCICE N 1 :



Dans le graphique ci-contre on donne la courbe représentative (C) d'une fonction f dérivable sur IR.

- A(0 , 2) ; B(-2 , 0) et C(-1 , e) sont trois points de (C).
- (T) : $y = -x + 2$ est la tangente à (C) au point A.

Par lecture graphique :

1) Donner : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Donner : f(0) ; f(-1) ; f'(0) et f'(-1)

3) Déterminer le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

4) Etudier le signe de la fonction $h : x \mapsto f(x) + x - 2$

5) a) Montrer que la fonction f admet une primitive F sur IR.

b) Déterminer F'(-2) ; F'(0) et F''(-1).

c) Donner les variations de F sur IR.

d) Montrer que la courbe (Γ) de la fonction F admet un point d'inflexion K dont on précisera ses coordonnées.

EXERCICE N 2 :

I/ Soit la fonction $\varphi : x \mapsto 1 - 2x.\ln x - x$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction φ.

2) Calculer $\varphi(1)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x dans]0,+∞[.

II/ Soit f la fonction définie sur [0,+∞[par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2.\ln x + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans]0,+∞[.
Vérifier que $2 < \alpha < 2,1$

4) Etudier la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de +∞.

5) Tracer la courbe (C)

III/ Soit la fonction g définie sur]0,+∞[par $g(x)= x^3.\ln x$

1) Justifier l'existence des primitives de la fonction f sur]0,+∞[.

2) Calculer g'(x) pour tout $x > 0$

3) En déduire la primitive F de f sur]0,+∞[qui s'annule en 1.

EXERCICE N 3 :

Soit la fonction définie sur]0,+∞[par $f(x)=x+2\,\frac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est dérivable sur]0,+∞[et que f'(x) a le signe de $g(x)=x^2+2-2\ln x$.

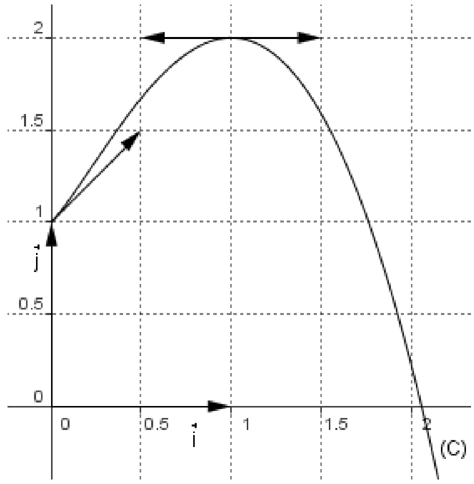
2) Etablir le tableau de variation de la fonction g. En déduire que g(x)>0

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$.
5) a) Montrer que (C) admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation.
b) Etudier la position de (C) par rapport à D.
6) Tracer la courbe (C).

EXERCICE N4 :

Dans le graphique ci-contre on a représenté la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :
$\begin{cases} f(x) = ax + bx^2.\ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ où a et b sont deux réels. La courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$.
On a représenté les vecteurs directeurs des demi-tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 1.



A/ 1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x}$
2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) Montrer que la restriction g de f à [0,1] admet une fonction réciproque (notée g^{-1}) définie sur un intervalle K qu'on précisera.
4) Tracer sur votre copie la courbe (C') de la fonction g et la courbe (Γ) de la fonction g^{-1} selon le repère $(O,\vec{i}, \vec{j})$.
5) a) Calculer $g^{-1}(1)$ et $g^{-1}(2)$.
b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en 1 et à gauche en 2.
B/ 1) Déterminer f(1) et f '(1). En déduire que pour tout réel x> 0, ona :
$f(x)=x-x^2.\ln x+1$
2) Montrer que la courbe (C') admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE N5 :

A/ On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x(x-1) + \ln x$
1) Etablir le tableau de variation de la fonction g.
2) Calculer g(1). En déduire le signe de $g(x)$ suvant les valeurs de x dans $]0,+\infty[$.
B/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)^2 + (\ln x)^2$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1) Montrer que : $f'(x) = 2\frac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
3) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $(+\infty)$ une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$.
4) Tracer la courbe (C).
C/ Soit $h(x)= \frac{f(x)}{x}$ pour tout $x > 0$
1) Vérifier que $h(x)= x - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}(\ln x)^2$
2) En déduire la primitive H de la fonction h sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.