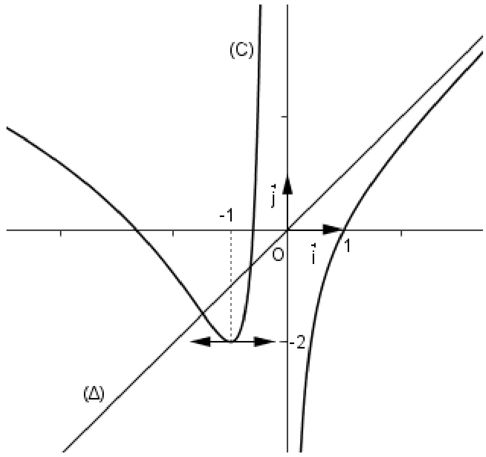
SERIE D'EXERCICES
Limites et continuité - Les nombres complexes

EXERCICE 1 :



I/ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormé du plan, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie sur IR*, les droites (Δ) : y=x et l'axe $(O, \vec{j})$ sont des asymptotes à (C). La courbe (C) admet au v(-∞) une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$.

1) Dresser le tableau de variation de f.
(On demande les limites aux bornes et le signe de f'(x))

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(\tan x)$

3) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles : $]-\infty,-1]$, [-1,0[et]0,+∞[

4) Déterminer le nombre de solutions dans IR* de chacune des équations suivantes : f(x)=0 et f(x)=x

II/ Soit la fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x-2\cos(\pi x)}{x-2} & \text{si } x \le 1 \\ g(x) = \frac{6(2-\sqrt{x^2+3})}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note h la fonction définie par : h=gof

1) Montrer que $\frac{x+2}{x-2} \le g(x) \le 1$ pour tout x≤1.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)$

3) Montrer que g est continue sur IR.

4) En déduire que la fonction h est continue sur]0,+∞[.

EXERCICE 2 :

Le tableau de variation ci-contre est celui d'une fonction f définie et continue sur [0,5].
(Chaque flèche indique une stricte monotonie)

x	0	2	3	5
f	2 ↘	1 ↗	4 ↘	-2

1) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants : [0,2] ; [2,3] ; [0,3] et [0,5]

2) Montrer que l'équation f(x)=1 admet exactement deux solutions α et β dans [0,5].

3) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution θ dans [0,5].

EXERCICE 3 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 1$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) Montrer que l'équation $x^3 = 3x^2 - 1$ admet dans IR exactement trois solutions α, β et γ (dans cet ordre). Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ et que $2 < \gamma < 3$.

3) En déduire le tableau de signe de $f(x)$.

EXERCICE 4 :

On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ définie et dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ et voici son tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$-$	‖
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x+4}\right)$

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ par : $g(x) = f(x) - x$

a) Déterminer l'image de $]-\infty, \frac{1}{2}[$ par g.

b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Vérifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$

c) Montrer que : $\alpha^2(1-2\alpha) = 1$

EXERCICE 5 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectifs :

$z_A = 2+i$, $z_B = 4+2i$, $z_C = 6+3i$ et $z_D = 3-i$

1) Vérifier que $z_D - z_A = -i.(z_B - z_A)$

2) En déduire la nature du triangle ABD.

EXERCICE 6 :

1) Ecrire sous la forme algébrique chacun des complexes suivants :

$e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $2i.e^{i\frac{\pi}{6}}$

2) On donne les complexes : $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

a) Ecrire sous la forme exponentielle chacun des complexes : z_1 et z_2

b) En déduire la forme exponentielle chacun des complexes :

$z_1 \times z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $i.\overline{z_1}$, $(z_2)^4$, $-z_1$ et $\frac{1}{z_1}$

EXERCICE 7:

1) Montrer que : $i.e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3$

2) Ecrire sous la forme exponentielle le complexe :

$$z = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^{26}$$

3) Montrer que $(\sqrt{3} - i)^{66}$ est un réel négatif.

EXERCICE 8:

1) Ecrire sous la forme exponentielle chacun des complexes suivants :

$z_1 = i + e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) *Cocher l'unique réponse correcte.*

Le module du nombre complexe $1 + e^{\frac{i\pi}{6}}$ est égal à :

a) $2\cos\frac{\pi}{12}$ **b)** $\cos\frac{\pi}{12}$ **c)** $2\sin\frac{\pi}{12}$

EXERCICE 9:

Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit les points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

1) Ecrire sous la forme exponentielle chacun des nombres complexes z_A et z_B
2) On donne $Z = z_A + z_B$
a) Ecrire Z sous la forme algébrique puis sous la forme exponentielle.
b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

EXERCICE 10:

Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $1-2i$.

À tout nombre complexe $z\neq1$ on associe : $z'=\frac{z-1+2i}{z-1}$

1) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que :
a) z' soit réel.
b) z' soit imaginaire pur

2) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z\neq1$, on a : $(z'-1)(z-1)=2i$
b) En déduire que pour tout point M distinct de A, on a : $AM\times AM'=2$
c) Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre A et passant par O, alors M' appartient à un cercle (C') que l'on précisera.