

EXERCICE N 1 :

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$

- 1) Montrer que $1 < u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- 2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite ℓ .
- 3) Soit $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b) Exprimer v_n puis u_n à l'aide de n . Puis retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 - c) Montrer que $S_n = \frac{1}{4} [1 - (\frac{1}{5})^n]$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

EXERCICE N 2 :

On considère la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$.

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
c) Déterminer alors sa limite.
- 2) On définit, pour tout entier naturel n , la suite $v_n = \frac{5}{u_n}$.
 - a) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique.
 - b) Exprimer (v_n) en fonction de n , puis (u_n) en fonction de n .
- 3) Retrouver la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE N 3 : (QCM)

Cocher l'unique réponse exacte :

1) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \frac{(-1)^n \cdot \sin(n)}{n}$ alors :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ n'existe pas

2) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{\sqrt{1+(\frac{3}{7})^n} - 1}{(\frac{3}{7})^n}$ alors :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

EXERCICE N 4 :

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{n!}{3^n}$

- 1) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{4}{3}$ pour tout entier naturel $n \geq 3$
- 2) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a : $u_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} u_3$.
(Utiliser le principe de récurrence)
- 3) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N 5 :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

- 1) Montrer que suite (u_n) est croissante
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N 6 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$
b) Etudier la monotonie de (u_n) . En déduire qu'elle converge puis donner sa limite L.
- 2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$
b) A l'aide de raisonnement par récurrence, déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$:
c) Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N 7 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

Dans le graphique ci-contre on a tracé une partie de la courbe (C) de f et la droite $\Delta : y=x$. Soit la suite réelle (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- 1) Indiquer sur l'axe des abscisses (O, \vec{i}) les quatre premiers termes de la suite (u_n) sans les calculer. Que peut-on conjecturer à propos de la monotonie de la suite (u_n) et de sa convergence.
- 2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f
b) En déduire que : $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) a) Etudier le signe de $f(x) - x$ suivant les valeurs de x dans $[0, 1]$.
b) En déduire que la suite (u_n) est croissante
- 4) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

