LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: SALAH HANNACHI « 4EME MATHS »	2014/2015 **SERIE D'EXERCICES** *Les isométries du plan*

EXERCICE N1:

Soit ABCD un carré direct et Δ la médiatrice du segment [BC]. Soit f l'isométrie du plan différente de la symétrie S_Δ et telle que f(B)=C et f(D)=A.

1) a) On note O le milieu de [BD]. Montrer que O est l'unique point invariant par f.
   b) En déduire la nature de f.
2) Soit $\varphi = f \circ S_\Delta$ et $\psi = S_\Delta \circ f$.
   a) Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(C)$. En déduire que $\varphi = S_{(AC)}$
   b) Montrer que $\psi = S_{(BD)}$.
   c) En déduire la nature de l'isométrie $\varphi \circ \psi$

EXERCICE N2:

Soit ABC un triangle direct et isocèle en A, D est le symétrique de B par rapport à (AC) et I le milieu du segment [BC].

1) Montrer qu'il existe une unique isométrie f qui fixe A et qui envoi B en C et C en D.
2) On pose $g = S_{(AC)} \circ f$
   a) Déterminer g(A), g(B), g(C) et g(I).
   b) Montrer que g est une symétrie orthogonale que l'on caractérisera.
3) Identifier alors f.

EXERCICE N3:

Soit ABC un triangle rectangle en A et direct. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1) Déterminer la droite Δ telle que :
   $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_\Delta \circ S_{(AH)}$
2) Donner la nature de l'isométrie $f = S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$

EXERCICE N4:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application de P dans P, qui à tout point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie de P.
2) a) Montrer que f admet un seul point invariant que l'on déterminera.
   b) En déduire que f est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE N5: (QCM)

1) Si f désigne une symétrie glissante du plan, alors l'isométrie $f \circ f$ est :
   a) une symétrie glissante   b) l'identité du plan   c) une translation
2) La composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie :
   a) orthogonale   b) centrale   c) glissante

EXERCICE N6:

Soit ABD un triangle équilatéral et I, O et J sont les milieux respectifs des segments [AB], [BD] et [AD].
Soit C le symétrique de A par rapport à (BD) et K le milieu de [DC]. Soit f l'isométrie du plan vérifiant :

• f n'admet pas de points fixes • $f(A)=B$ et $f(I)=O$

1) Vérifier que f est une symétrie glissante.
2) Montrer que O est le milieux du segment $[B , f(B)]$ puis déduire $f(B)$.
3) a) Identifier l'isométrie du plan qui envoi A en B , B en D et D en A.
   b) Déterminer l'image du triangle ABD par f. En déduire $f(D)$.
4) Soit $g= t_{\overrightarrow{DJ}} \circ f$ où $t_{\overrightarrow{DJ}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{DJ}$.
   a) Vérifier que $g(B)=J$
   b) Déterminer $g(I)$ et $g(O)$. En déduire la nature de g
   c) Montrer alors que $f= S_{(IO)} \circ t_{\overrightarrow{JD}}$ où $S_{(IO)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IO).

EXERCICE N7: (VRAI ou FAUX)

1) Soit ABCD un carré direct et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Alors $r=S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$

2) Soit (AB) une droite et C un point de (AB). Alors $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ est l'identité du plan.

3) Soit A, B et C trois points non alignés du plan et f est une isométrie qui fixe les deux points A et B et ne fixe pas le point C, alors est la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

4) Soit A et B deux points distincts du plan et O le milieu de [AB]. Soit f une isométrie qui envoi A sur B et B sur A. Alors O est un point fixe par f.

5) Soit ABC un triangle équilatéral et f une isométrie qui envoi A sur B, B sur C et C sur A. Alors $f \circ f \circ f$ est l'identité du plan.

6) Si une isométrie fixe trois points distincts alors elle est l'identité du plan.

EXERCICE N8:

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{i} , \vec{j})$.On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} z$.

1) Montrer que f est une isométrie.
2) Montrer que f est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE N9 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{i} , \vec{j})$. Soit f l'application de P dans P, qui à tout point M(x,y) on associe le point M'(x',y') tel que : $\begin{cases} x' = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie.
2) Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
3) En déduire la nature de l'application f

EXERCICE N10:

Soit ABCD un rectangle tel que AB=2AD. On désigne par E et F les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1) Caractériser : $S_{(AB)} \circ S_{(EF)}$ et $S_{(AB)} \circ S_{(AF)}$
2) Caractériser : $S_{(AD)} \circ S_{(EF)}$ et $S_{(ED)} \circ S_{(BF)}$
3) Soit $f=S_{(BF)} \circ S_{(AF)} \circ S_{(AB)}$. Montrer que $f=S_{(EF)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$ puis identifier f.
4) En décomposant $t_{\overrightarrow{AB}}$ identifier $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$.