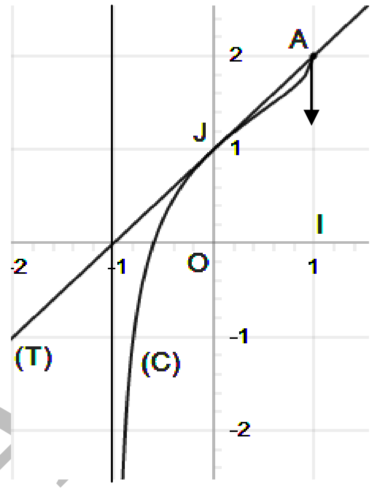
Fonction réciproque - Primitives

Hannachi Salah ∴ 4^{eme} Maths

EXERCICE N1 :



Dans le graphique ci-contre : (C) représente dans le repère (O, I, J) la courbe représentative d'une fonction f définie , continue sur $]-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. (T) est la tangente à (C) au point J.
La droite D : x=−1 est une asymptote à (C).
La courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point A(1,2).
La courbe (C) n'admet aucune tangente horizontale.

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-2}{x-1}$ et $f'(0)$.

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

3) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.
   a) Montrer que f^{-1} est dérivable à gauche en 2 et préciser $(f^{-1})'_g(2)$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f^{-1}(x)}{x-1}$
   c) Etablir le tableau de variation de la fonction f^{-1}.

4) On désigne par F la primitive de f sur $]-1,1]$ qui s'annule en $\frac{1}{2}$ et α l'unique solution dans $]-1,1]$ de l'équation $f(x)=0$.
   a) Déterminer F'(0), F'(1) et F'(α).
   b) Donner les variations de la fonction F sur $]-1,1]$. En déduire le signe de F(x) pour tout x ∈ $[\alpha, 1]$.

EXERCICE N2 :

Déterminer une primitive de la fonction f sur I, dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4-2x}}$; $I=]-\infty, 2[$

2) $f : x \longmapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$; $I=]0, +\infty[$

3) $f : x \longmapsto \frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$; $I=]1,2[$

4) $f : x \longmapsto \frac{1}{cos^4 x}$; $I=\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

5) $f : x \longmapsto \frac{3x^2}{(1+x^3)^4}$; $I=IR\backslash\{-1\}$

6) $f : x \longmapsto (x+2)\sqrt{x-1}$; $I=[1, +\infty[$

7) $f : x \longmapsto \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$; $I=]1, +\infty[$

8) $f : x \longmapsto x(1+x^2)^5$; I=IR

9) $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$; $I=]0, +\infty[$

10) $f : x \longmapsto x^2\sin(1+x^3)$; I=IR

EXERCICE N3 :

Soit la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x)=\sqrt{1+cosx}$.

1) a) Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]0,\sqrt{2}[$ et expliciter $(f^{-1})'(x)$.

2) Soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ par $g(x)=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.

On note G la primitive de g sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ telle que $g(0)=0$

a) Calculer la dérivée de la fonction h : $x \longmapsto G(x)+G(-x)$. En déduire que G est impaire.

b) Montrer que pour tout réel x de $[0,\sqrt{2}[$, $G(x)=\pi - f^{-1}(x)$. En déduire G(1).

EXERCICE N4 :

On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Soit F la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0 et g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=F(\sin x)$.

1) Montrer que F réalise une bijection de $]-1,1[$ sur l'intervalle $K=F(]-1,1[)$.

2) a) Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $g(x)=x$.

c) Expliciter alors $F^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.

3) Calculer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

EXERCICE N5 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[4]{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J).

1) Montrer que (C) est symétrique par rapport à l'axe (O,J).

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x)=\sqrt{x}.\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

4) a) On désigne par D la droite d'équation y=x. Etudier la position de (C) par rapport à D.

b) Tracer la courbe (C).