PROF : H-Jamel

Série Mathématiques(2) 2014/2015

4^{eme}

Exercice°1 :

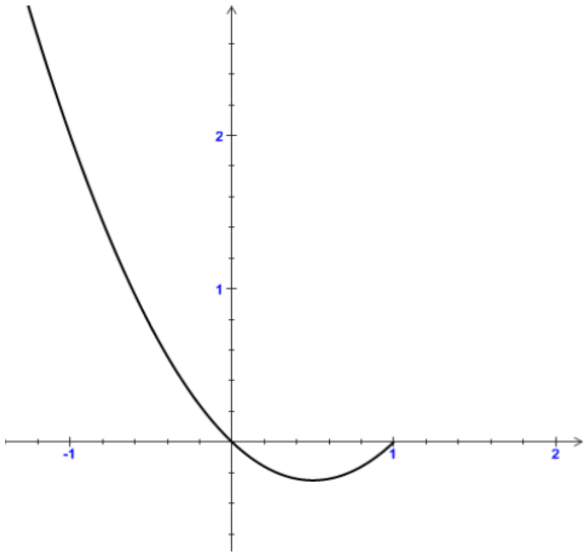
On considère une fonction g dérivable telle que sa fonction dérivée g' est continue sur [-1,1].
La présentation graphique de g est donnée ci-contre.
Répondre par vrai ou faux :

a) $\int_0^1 g'(x)dx = 0$

b) $\int_0^1 g(x)dx > -\frac{1}{2}$

c) $\int_{-1}^1 g(x)dx > 0$

d) $\int_{-1}^0 xg'(x^2)dx = 0$



Exercice°2 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$*.Soit A(i).*
Pour tout nombre complexe $z \neq i$ *, on pose* $f(z) = \frac{iz}{i-z}$

1) *On considère les ensembles des points :* $E_1 = \{M(z) \in P$ *tel que* $f(z) \in IR\}$ *et*
$E_2 = \{M(z) \in P$ *tel que* $|f(z)| = 1\}$

a) *Déterminer et construire* (E_1)*. (voir annexe figure n°2) .*
b) *Déterminer et construire* (E_2)*. (voir annexe figure n°2) .*
c) *Déterminer* $E_1 \cap E_2$

2) a) *Pour tout* $\theta \in IR \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in z\}$ *, on pose* $z = e^{i\theta}$*. Montrer que* $f(z) = \frac{e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}}{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$

b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *, l'équation* $z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

c) *Déduire les solutions dans* $\mathbb{C}$ *de l'équation (E) :* $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(i-z)^3 + iz^3 = 0$

Exercice n°3

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ *par* $\begin{cases} f(x) = x + x(\text{Ln}x)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(unité : 4cm).*

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenue.
c) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ *et que* $f'(x) = (1+\text{Ln}x)^2$.
d) Dresser le tableau de variations de f.
2)a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 .
b) Etudier la position relative de (C) et T.
c) construire (C) et T.

3) *Soit la suite* $(I_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $I_n = \int_1^e x(\mathrm{Ln}x)^n dx$.

a) Calculer I_1.

b) Montrer que pour tout n≥1 on a : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations x=1, x=e et y=0. Calculer A en cm^2.

Exercice n°4

Soit F_n *la fonction définie sur [0,+∞[par* $F_n(x) = \int_0^{\mathrm{Ln}(1+x)} te^t(e^t - 1)^n dt$ *où* $n \in \mathrm{IN}^*$

1°)a) Montrer que F_n *est dérivable sur [0,+∞[et que* $F'_n(x) = x^n \mathrm{Ln}(1+x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$ *on a* $F_n(x) = \int_0^x t^n \mathrm{Ln}(1+t)dt$.

2) On considère la suite (u_n) *définie sur* IN^* *par* $u_n = F_n(1)$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ *on a :* $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. *En déduire la valeur de* u_1.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$ *on a :* $0 \leq u_n \leq \frac{\mathrm{Ln}2}{n+1}$. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) Soit (v_n) *la suite défine sur* IN^* *par* $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \text{----------} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

On pose pour $x \in [0,1]$ *et pour* $n \in \mathrm{IN}^*$, $S_n(x) = 1 - x + x^2 - \text{----------------} (-1)^n x^n$.

a) Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{x+1}$ *et que* $v_n = \mathrm{Ln}2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

b) Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$ *on a :* $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$. *En déduire que* $|v_n - \mathrm{Ln}2| \leq \frac{1}{n+2}$.

4)a) Montrer, en intégrant par parties, que $u_n = \frac{\mathrm{Ln}2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}(\mathrm{Ln}2 - v_n)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)u_n$.

Exercice n°5

Soit $\theta \in]0, \pi[$ *et* (E_θ) : $z^2 - 2z - 2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

1. a)*Montrer que :* $1 + 2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$

   b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$, (E_θ)

2. *On donne* $f(z) = z^3 - 4z^2 + 2(2 - i\sin\theta e^{i\theta})z + 4i\sin\theta e^{i\theta}$

   a) Calculer f(2)

   b) Montrer que : $f(z) = (z-2)(z^2 + bz + c)$ *où b et c deux nombres complexes à déterminer*

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation : f(z)=0*

3. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

   On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives : 2, $1 - e^{i\theta}$ *et* $1 + e^{i\theta}$

   a) *Déterminer la forme exponentielle de* z_B *et* z_C

   b) *Montrer que : OBAC est un rectangle*

   c) *Déterminer* θ *pour que OBAC soit un carré*

Exercice n°6 *Soit f la fonction définie sur] 0 ; +∞[par* $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

I. 1- a)*Montrer que f est dérivable sur] 0 ; +∞[et calculer f'(x*

   b) Dresser le tableau de variation de f

   c)Vérifier que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$

2- a)Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]1 ; 2[$

b) Donner suivant les valeurs de x le signe de $f(x) - x$

3-Montrer que pour tout $x \geq 1$; on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

II. Soit U la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 \geq 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{U_n}} \end{cases}$

1 - Déterminer la valeur de U_0 pour la quelle U est constante.

Dans la suite on suppose que $U_0 \neq \alpha$

2 - a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq 1$

b) Montrer que U est décroissante

c)Déduire que U est convergente et déterminer sa limite

3 - a)Montrer que pour tout $n \in IN$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

b) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in IN$

c)Retrouver la limite