1. Exercices de base

1. 1. Division Euclidienne - 1 (c)

Dans une division euclidienne entre entiers naturels quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 320 et le reste 39 ?

Correction

On a $320 = q\times b+39 \Leftrightarrow q\times b = 320-39 = 281$. Cherchons les diviseurs de 281 : 1 et 281. Ce sont les seules valeurs possibles de q et b.

1. 2. Division Euclidienne-2

Quel est le nombre de diviseurs de 2880 ?

1. 3. Division Euclidienne-3 (c)

1. Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise 6.
3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $n + 2$.
4. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n + 1$ divise $3n - 4$.

Correction

1. L'ensemble des diviseurs de 6 est D = $\{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.
2. $n - 4$ divise 6 si $n - 4$ appartient à D, soit si n appartient à D + 4 = $\{-2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10\}$.
3. On peut remarquer que $n + 2 = n - 4 + 6$. Puisqu'il est évident que $n - 4$ divise $n - 4$, le résultat du 2. permet alors d'affirmer que si $n - 4$ divise $n + 2$, alors $n - 4$ divise $n + 2 - (n - 4)$ c'est-à-dire $n - 4$ divise 6.

Réciproquement si $n - 4$ divise 6 alors $n - 4$ divise $6 + n - 4$ c'est-à-dire $n - 4$ divise $n + 2$. On a donc démontré que $n - 4$ divise $n + 2$ si et seulement si $n - 4$ divise 6.

4. On peut raisonner en utilisant le même principe qu'à la question précédente. On remarque que

$$3n - 4 = 3(n + 1) - 7,$$

et puisqu'il est immédiat que $n + 1$ divise $3(n + 1)$, on peut écrire :

- si $n + 1$ divise $3n - 4$, alors $n + 1$ divise $3n - 4 - 3(n + 1)$ c'est-à-dire $n + 1$ divise -7 ;

réciproquement : si $n + 1$ divise -7 alors $n + 1$ divise $-7 + 3(n + 1)$ c'est-à-dire $n + 1$ divise $3n - 4$.

L'ensemble des diviseurs de -7 (ou de 7) étant $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$, on en déduit que $n + 1$ divise $3n - 4$ si et seulement si $n + 1$ appartient à $\{-7 ; -1 ; 1 ; 7\}$ soit n appartient à $\{-8 ; -2 ; 0 ; 6\}$.

1. 4. PGCD - 1 (c)

Trouvez le PGCD des nombres 1640 et 492 en utilisant la décomposition en facteurs premiers, puis en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Correction

Avec l'aide de Maple on a immédiatement :

```
> ifactor(1640); ifactor(492);
```

$$(2)^3\ (5)\ (41)$$

$$(2)^2\ (3)\ (41)$$

et le PGCD : $2^2.41 = 164$. Avec Euclide : $\begin{array}{l}1640 = 492\times 3+164\\ 492 = 164\times 3+0\end{array}$ donc...

1. 5. Congruences-1 (c)

Quel est le reste de la division par 7 du nombre $(32)^{45}$

Correction

Le reste de 32 dans la division par 7 est 4 ; 4^2 donne 2, 4^3 donne 8, soit 1 ; comme 45 = 15.3, on a :

$$32^{45} \equiv 4^{45}(7) \equiv \left(4^3\right)^{15}(7) \equiv (1)^{15}(7) \equiv 1(7).$$

Le reste est donc 1.

1. 6. Congruences-3 (c)

1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.
2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Correction

1. $p = 0$: 1, $p = 1$: 5, $p = 2$: -1 ou 12, $p = 3$: -5 ou 8, $p = 4$: 1 donc

pour $p = 4k$ le reste est 1,

pour $p = 4k+1$ le reste est 5,

pour $p = 4k+2$ le reste est 12 ou -1,

pour $p = 4k+3$ le reste est 8 ou -5.

2. $N = 31^{4n+1}+18^{4n-1}$: $31 = 2\times 13+5 \equiv 5(13)$ et $18 = 13\times 1+5 \equiv 5(13)$; on a donc

$$N = 31^{4n+1}+18^{4n-1} \equiv \left[5^{4n+1}+5^{4n-1}\right](13) \equiv \left[5^{4n+1}+5^{4n'+3}\right](13) \equiv [5+8](13) \equiv 0(13).$$

1. 7. Divers-5 (QCM) (c)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples ($4 + 10k$; $9 + 24k$) où $k \in \mathbb{Z}$ ».
Proposition 2 : Pour tout entier naturel n non nul : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».
Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul : « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et de $4n + 3$ est égal à 7 ».
Proposition 4 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$ si et seulement si $x \equiv 1[5]$ ».

Proposition 5 : Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix (M vaut $100a+10b+c$ où a, b, c sont des chiffres entre 0 et 9) et N a pour écriture bca en base dix.
« Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

Correction

Proposition 1 : Faux. 12 et 5 sont premiers entre eux, l'équation $12x-5y=1$ a des solutions ; particulièrement le couple (3, 7) donc le couple (9, 21) est solution de $12x-5y=3$. On opère de manière standard :

$$\begin{cases}12x-5y=3\\12\times 9-5\times 21=3\end{cases}\Rightarrow 12(x-9)-5(y-21)=0\Rightarrow\begin{cases}x-9=5k\\y-21=12k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9+5k\\y=21+12k\end{cases};$$

les couples ($4 + 10k$; $9 + 24k$) ne son qu'une partie des couples solutions (la solution 9, 21 n'en fait même pas partie…).
Proposition 2 : Faux. 5^{6n+1} + est évidemment divisible par 5 ; 2^{3n+1} n'est formé que de puissances de 2, aucun de ces nombres ne sont divisibles par 5.
Proposition 3 : **Vrai**. Prenons $n=1+7k$ et remplaçons : $3n+4=3+21k+4=7+21k=7(1+3k)$ puis $4n+3=4(1+7k)+3=7+28k=7(1+4k)$; si le PGCD vaut 7, alors $1+3k$ et $1+4k$ doivent être premiers entre eux : on doit trouver u et v tels que

$$u(1+4k)+v(1+3k)=1\Rightarrow\begin{cases}u+v=1\\4u+3v=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=-3\\v=4\end{cases}.\text{ Ok.}$$

Proposition 4 : Faux. On teste tous les restes modulo 5 :

x	0	1	2	3	4
$x^2 + x + 3$	3	0	4	0	3

donc faux puisqu'on a aussi 3 comme solution possible.
Proposition 5 : Vrai

$\begin{cases}M=100a+10b+c\\N=100b+10c+a\end{cases}\Rightarrow M-N=99a-90b-9c=9(11a-10b-c)$. Si $M=100a+10b+c$ est un multiple de 27, comme $108=4\times 27$, on a $-8a+10b+c\equiv 0[27]\Rightarrow 10b+c=8a+27k$. Pour que $M-N$ soit divisible par 27 il faut que $11a-10b-c=11a-8a-27k=3a-27k$ soit divisible par 3, ce qui est le cas.

1\. 8. La classe…

Dans une Terminale S, la taille moyenne des élèves est de 167 cm, la taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm. Quel est l'effectif de la classe (inférieur à 40…) ?

Correction

Appelons f le nombre de filles et g le nombre de garçons :
$f\times 160+g\times 173{,}5=(f+g)\times 167\Leftrightarrow 6{,}5g=7f\Leftrightarrow 13g=14f$ donc il y a 13 filles et 14 garçons (ou 26 filles et 28 gars, mais le total dépasse 40).

1\. 9. ROC+Base 12

Partie A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

On note 0, 1, 2, . . . , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12}=\beta\times 12^2+\alpha\times 12+7=11\times 144+10\times 12+7=1711 \text{ en base 10.}$$

1\. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1=\overline{\beta 1\alpha}^{12}$. Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2=1131=1\times 10^3+1\times 10^2+3\times 10+1$.
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N=\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}^{12}$.

2\. a. Démontrer que $N\equiv a_0[3]$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3\. a. Démontrer que $N\equiv a_n+a_{n-1}+\dots+a_1+a_0[11]$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

touati.amin@yahoo.fr

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $N=\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

Correction

Partie A : Question de cours

Les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances sont $a\equiv a'[p]$ et $b\equiv b'[p]$ alors $a+b\equiv a'+b'[p]$, $ab\equiv a'b'[p]$ et $a^n\equiv a'^n[p]$.

Propriété de compatibilité avec la multiplication :

on pose que $a=pk+a'$, $b=ph+b'$ d'où $ab=p^2kh+a'ph+b'pk+a'b'=a'b'+p(\ldots)$.

Partie B

1. a. $N_1=\overline{\beta 1\alpha}^{12}=12^2\times 11+12\times 1+10=1606$.

b. Il faut diviser par 12 plusieurs fois : $1131\equiv 12\times 94+3$, $94\equiv 12\times 7+10=12\times 7+\alpha$, donc

$$N_2=\overline{7\alpha 3}^{12}=7\times 12^2+\alpha\times 12+3=7\times 144+10\times 12+3=1131.$$

2. a. $N=12^{n-1}\times a_n+\ldots+12\times a_1+a_0\equiv a_0[12]\equiv a_0[3]$. Si le dernier chiffre est 0 modulo 3, soit un multiple de 3 le nombre sera divisible par 3.

b. N_2 se termine par 3 en base 12, il est divisible par 3. En base 10 la somme des chiffres est 6, il est donc divisible par 3.

3. a. Chaque puissance de 12 est congrue à 1 modulo 11 donc $N\equiv a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0[11]$. Si la somme des chiffres est un multiple de 11, ce nombre sera divisible par 11.

b. La somme des chiffres de N_1 en base 12 est $\beta+1+\alpha=11+1+10=22$ donc N_1 est divisible par 11. En base 10 on fait la somme des termes de rang pair moins la somme des termes de rang impair : 12−1=11 qui est divisible par 11.

4. $N=\overline{x4y}^{12}$. N est divisible par 33 si N est divisible par 3 : $y=3k$, et par 11 : $x+4+y=11k'$.

On résoud : $\begin{cases} y=3k \\ x+4+3k=11k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3k \\ x=11k'-3k-4 \end{cases}$; les valeurs possibles de k sont 0, 1, 2, 3 :

k	y	x	k'	N	N (b. 10)
0	0	$11k'-4$	$k'=1$ soit $x=7$	$\overline{740}^{12}$	1056
1	3	$11k'-7$	$k'=1$ soit $x=4$	$\overline{443}^{12}$	627
2	6	$11k'-10$	$k'=1$ soit $x=1$	$\overline{146}^{12}$	198
3	9	$11k'-13$	$k'=2$ soit $x=9$	$\overline{949}^{12}$	1353

1. 10. Surface+Eq. dioph.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; −3) et (−1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Determiner la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).
4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation z = 68. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a<b$ et ppcm(a ; b)= 440, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système

$$(1):\begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ \text{ppcm}(a;b)=440 \end{cases}.$$

Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors pgcd(a ; b) est égal à 1 ou 5. Conclure.

Dans cette question toute trace de recherche même incomplete ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction

1. Si $M(x\,;y\,;z)$ appartient à (S), alors on a $x^2+y^2-z^2=1$, soit $x^2+y^2-(-z)^2=x^2+y^2-z^2=1$, c'est-à-dire que le point M' de coordonnées $(x\,;y\,;-z)$ appartient également à (S) et réciproquement.
Par conséquent, le plan d'équation $z=0$, c'est-à-dire le plan (xOy), est un plan de symétrie de la surface (S).

2. a. $M\in(\mathrm{D})\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=-4k\\y-1=0k\\z+3=4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4k+3\\y=1\\z=4k-3\end{cases},k\in\mathbb{R}$.

b. On remplace *x*, *y* et *z* dans l'équation de (S) :

$x^2+y^2-z^2=(-4k+3)^2+1^2-(4k-3)^2=16k^2-24k+9+1-16k^2+24k-9=1$, ce qui est toujours vrai.

On en déduit que tout point de (D) appartient à (S), la droite est incluse dans la surface (S).

3. Soit (P) un plan parallèle au plan (xOy). (P) a alors une équation de la forme $z=c$ où *c* est un réel, soit $x^2+y^2=c^2+1$ qui est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(0\,;0\,;c)$ et de rayon $\sqrt{1+c^2}$, tracé dans (P). La section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy) est un cercle.

4. a. Soit (C) la courbe d'intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z=68$.

D'après la question précédente (C) est le cercle de centre $\Omega(0\,;\,0\,;\,68)$ et de rayon $\sqrt{1+68^2}=5\sqrt{185}$, tracé dans le plan d'équation $z=68$.

b. Soit $(a\,;b)$ une solution de (1). Alors : $\begin{cases}a<b\\a^2+b^2=4625\\\text{ppcm}(a\,;b)=440\end{cases}$.

d le PGCD de *a* et *b* divise *a* (et aussi a^2) et divise *b* (et aussi b^2), d'où *d* divise a^2+b^2 ; *d* divise 4625.
De plus, *d* divise le PPCM de *a* et *b*. Donc *d* divise 440, *d* est un diviseur commun de 440 et de 4625.
Or les diviseurs de 4625 sont : 1 ; 5 ; 25 ; 37 ; 125 ; 185 ; 925 et 4625.
Les diviseurs de 440 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 40 ; 44 ; 55 ; 88 ; 110 ; 220 et 440.
d ne peut être égal qu'à 1 ou à 5.
* $d=1$, $ab=\text{pgcd}(a\,;b)\times\text{ppcm}(a\,;b)$, c'est-à-dire $ab=1\times440=440$.
a et *b* sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 440.
Or $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4625+880=5505$; ce qui est impossible car $a+b$ est un entier naturel (en tant que somme de deux entiers naturels). Il n'y a dans ce cas aucun couple solution de ce système.
* Supposons que $d=5$; alors $ab=\text{pgcd}(a\,;b)\times\text{ppcm}(a\,;b)$, c'est-à-dire $ab=5\times440=2200$.
a et *b* sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 2200.
Or $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4625+4400=9025$, soit $a+b=95$.
Seul le couple $(40\,;55)$ est solution de ce système dans ce cas.
Il existe un seul point *M* de (C) tel que *a* et *b* soient des entiers naturels vérifiant $a<b$ et $ppcm(a\,;b)=440$.

1\. 11. ROC+Congruences

Rappel : Pour deux entiers relatifs *a* et *b*, on dit que *a* est congru à *b* modulo 7, et on écrit $a\equiv b \bmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif *k* tel que *a* = *b* +7*k*.
1\. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*
a. Soient *a*, *b*, *c* et *d* des entiers relatifs.
Démontrer que : si $a\equiv b \bmod 7$ et $c\equiv d \bmod 7$ alors $ac\equiv bd \bmod 7$.
b. En déduire que : pour *a* et *b* entiers relatifs non nuls si $a\equiv b \bmod 7$ alors pour tout entier naturel *n*, $a^n\equiv b^n \bmod 7$.
2\. Pour *a* = 2 puis pour *a* = 3, déterminer un entier naturel *n* non nul tel que $a^n\equiv 1 \bmod 7$.
3\. Soit *a* un entier naturel non divisible par 7.
a. Montrer que : $a^6\equiv 1 \bmod 7$.
b. On appelle *ordre* de *a* mod 7, et on désigne par *k*, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k\equiv 1 \bmod 7$.

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \bmod 7$. En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?
c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
4. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \bmod 7$.

Correction

1. a. On écrit que $a = b + 7k$, $c = d + 7k'$ d'où
$ac = (b+7k)(d+7k') = bd + 7(bk' + dk + 7kk') \Leftrightarrow ac \equiv bd[7]$.

b. Par récurrence : vrai pour n = 1. Supposons $a^n \equiv b^n \bmod 7$, alors $a^n \times a \equiv b^n \times b[7] \Leftrightarrow a^{n+1} \equiv b^{n+1}[7]$.

2. Pour a = 2 puis pour a = 3, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

On cherche les restes de 2^n et 3^n modulo 7 :

n	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	1	2	4	1
3^n	3	2	6 ou −1	4 ou −3	5 ou −2	1

Donc pour 2 la première valeur de n est 3, pour 3 c'est 6.

3. a. Théorème de Fermat : si p premier ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ d'où avec p = 7 : $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. On a donc $6 = kq + r \Rightarrow a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = \left(a^k\right)^q a^r$; comme $a^k \equiv 1 \bmod 7$, $\left(a^k\right)^q \equiv 1^q[7] \equiv 1[7]$ donc $a^r \equiv 1[7]$. Comme k est le plus petit entier tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$, $r = 0$ donc k divise 6, soit k=1, 2, 3 ou 6.

c.

a	a^2 mod 7	a^3 mod 7	a^6 mod 7
1 (k=1)	1	1	1
2 (k=3)	4	1	1
3 (k=6)	2	6	1
4 (k=3)	2	1	1
5 (k=6)	4	6	1
6 (k=2)	1	6	1

4. $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006}$, et $2006 = 2\times1003 = 3\times668 + 2 = 6\times334 + 2$; on a donc
$2^{2006} = \left(2^3\right)^{668} \times 2^2 \equiv 4[7]$, $3^{2006} = \left(3^6\right)^{334} \times 3^2 \equiv 9[7] \equiv 2[7]$, $4^{2006} = \left(4^3\right)^{668} \times 4^2 \equiv 16[7] \equiv 2[7]$,
$5^{2006} = \left(5^6\right)^{334} \times 5^2 \equiv 25[7] \equiv 4[7]$ et $6^{2006} = \left(6^2\right)^{1003} \equiv 1[7]$
d'où enfin $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006} \equiv 4+2+2+4+1[7] \equiv 13[7] \equiv 6[7]$.

1. 12. QCM

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.
Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».
Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0(\text{modulo } 6)$ alors $x \equiv 0(\text{modulo } 3)$ ».
Proposition 3 : « L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples ($4+10k$; $9+24k$) où $k \in \mathbb{Z}$ ».
Proposition 4 : « Il existe un seul couple (a ; b) de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et PPCM(a, b) − PGCD(a, b) = 1 ».
Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.
Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

Correction

Proposition 1 : Vrai.
On fait l'essai. Ca semble marcher.

n	1	2	3	4	5	6	7
$2^{2n} - 1$	3	15	63	255	1023	4095	16383
reste	0	0	0	0	0	0	0

Vérifions : $2^{2n} = \left(2^2\right)^n = 4^n \equiv 1[3] \Rightarrow 2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$.

Proposition 2 : Faux.

touati.amin@yahoo.fr

$x^2+x=x(x+1)$ est un multiple de 2 donc pour que ce soit un multiple de 6, il faut qu'un des deux termes x ou $x+1$ soit un multiple de 3 ; on pourrait alors avoir $x+1\equiv 0[3] \Leftrightarrow x\equiv 2[3]$. Par exemple 5 donne 25 + 5 = 30 qui est bien un multiple de 3.

Proposition 3 : Faux.

$12x-5y=3$ a comme solution particulière $x=4$ et $y=9$; on a alors

$$\begin{cases} 12x-5y=3 \\ 12\times 4-5\times 9=3 \end{cases} \Rightarrow 12(x-4)-5(y-9)=0 \Leftrightarrow 12(x-4)=5(y-9) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=5k \\ y-9=12k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+5k \\ y=9+12k \end{cases}.$$

Proposition 4 : Vrai.

Posons $\begin{cases} a=a_1k \\ b=b_1k \end{cases}$ où k est PGCD(a, b) ; on a alors $a_1b_1k-k=1 \Rightarrow k=1$ sinon k diviserait 1. Notre équation devient alors : PPCM(a, b) – PGCD(a, b) = 1 devient donc $ab-1=1 \Leftrightarrow ab=2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : Vrai.

$M=\overline{abc}=100a+10b+c$, $N=\overline{bca}=100b+10c+a$ donc

$$M-N=100a+10b+c-100b-10c-a=9(11a-10b-c)$$

est divisible par 27 si $11a-10b-c$ est divisible par 3.

Sachant qu'on a $M=100a+10b+c=27k \Leftrightarrow 10b+c=27k-100a$, on remplace :

$$11a-10b-c=11a-27k+100a=111a-27k\ ;$$

or 111 est un multiple de 3. Ok.

<u>1. 13. Restes chinois</u>

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases} n\equiv 13(19) \\ n\equiv 6(12) \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19u+12v=1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N=13\times 12v+6\times 19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n\equiv n_0(19) \\ n\equiv n_0(12) \end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n\equiv n_0(19) \\ n\equiv n_0(12) \end{cases}$ équivaut à $n\equiv n_0(12\times 19)$.

3. a. Trouver un couple (u ; v) solution de l'équation $19u+12v=1$ et calculer la valeur de N correspondante.
b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228=12\times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

<u>**Correction**</u>

Partie A : Question de cours, voir démonstrations arithmétique.

Partie B : $(S)\begin{cases} n\equiv 13(19) \\ n\equiv 6(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\equiv 13+19k \\ n\equiv 6+12k' \end{cases}$.

1. Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19u+12v=1$.

$N=13\times 12v+6\times 19u$ est une solution de (S) : il faut mettre N sous la forme $N\equiv 13+19k$. Or $12v=1-19u$ donc $N=13(1-19u)+6\times 19u=13+19\times(-7u)$; ok.

De même $N=13\times 12v+6\times 19u=13\times 12v+6(1-12v)=6+12\times 7v$; ok.

2. a. Si n_0 est une solution de (S), on a $\begin{cases} n_0=13+19k_0 \\ n_0=6+12k_0' \end{cases}$ d'où en soustrayant ligne à ligne :

$$\begin{cases} n-n_0=19(k-k_0) \\ n-n_0=12(k'-k_0') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\equiv n_0(19) \\ n\equiv n_0(12) \end{cases}.$$

b. En fait 19 divise $n-n_0$ de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux, 19×12 divise $n-n_0$, ce qui équivaut à $n\equiv n_0\left(12\times 19\right)$.

3. a. Avec l'algorithme d'Euclide on a $19\left(-5\right)+12\left(8\right)=1$; on peut donc prendre $u=-5$ dans $N=13+19\times\left(-7u\right)$, ce qui donne $N=678$; de même on prend $v=8$ et $N=6+12\times\left(7v\right)$, ce qui redonne bien $N=678$.

b. $p\left(\bar{C},\bar{C}\right)=p\left(\bar{C}\right)p\left(\bar{C}\right)=0,8^2=0,64$.

4. 222.

<u>1. 14. QCM</u>

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidatindiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2-x+4\equiv 0\,(\text{modulo } 6)$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x\equiv 2(6)$.

D : les solutions vérifient $x\equiv 2(6)$ ou $x\equiv 5(6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (34k-7\,;\,5-24k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (17k-7\,;\,5-12k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (-7k\,;\,5k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 17\,89^{2\,005}$. On a alors :

A : $n\equiv 4(17)$ et $p\equiv 0(17)$. C : $p\equiv 4(17)$.

B : p est un nombre premier. D : $p\equiv 1(17)$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z=\dfrac{b-ia}{1-i}$. C: $a-z=i(b-z)$.

B : $z-a=e^{i\frac{\pi}{4}}(b-a)$. D : $b-z=\dfrac{\pi}{2}(a-z)$.

<u>Correction</u>

1. Testons la réponse D : si $x\equiv 2(6)$ alors $x^2-x+4\equiv 4-2+4\left(6\right)\equiv 6\left(6\right)\equiv 0\left(6\right)$; si $x\equiv 5(6)$ alors $x^2-x+4\equiv 25-5+4\left(6\right)\equiv 24\left(6\right)\equiv 0\left(6\right)$. Ok.

2. Simplifions par 2 : $12x + 17y = 1$ a toujours des solutions car 12 et 17 sont premiers entre eux ; la B est fausse. Si on cherche une solution particulière la C donne l'idée que -7 et 5 est pas mal : $12\times -7+17\times 5=1$. Après on termine de manière classique pour obtenir la solution C.

3. On a $n = 1\,789 \equiv 4\ (17)$; par ailleurs $4^2=16\equiv -1\left(17\right)$ donc $4^{2\times 1002+1}\equiv\left(-1\right)^{1002}\times 4\left(17\right)\equiv 4\left(17\right)$. Réponse C.

<u>1. 15. Eq. dioph (c)</u>

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N=a^2-b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ vérifiant la relation (E) : $a^2-250\,507=b^2$.

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2-250\,507=b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2-250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

touati.amin@yahoo.fr

2. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; b).
3. On suppose que le couple (a ; b) vérifie la relation (E).
a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505+9k ; b) soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.
Partie C
1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

Correction

Partie A

1. $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:
s'ils sont tous les deux pairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;
s'ils sont tous les deux impairs, leur somme et leur différence sont paires, le produit est pair ;
comme N est impair, a et b n'ont pas la même parité.
2. Evident : $N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = pq$.
3. Comme il a été dit, pour que le produit soit impair, il faut qu'ils n'aient pas la même parité.

Partie B

1. a.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X^2	0	1	4	0	−2 = 7	−2 = 7	0	4	1
X^2-1	−1 = 8	0	3	−1 = 8	6	6	−1 = 8	3	0

b. On a 250 507 = 27 834 . 9 + 1, donc les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$ sont ceux de $X^2 - 1$.
c. Comme $a^2 - 250\,507 = b^2$, les restes doivent être égaux modulo 9, on a $a^2 \equiv b^2 + 1(9)$;
*si on prend $b \equiv 0(9)$ alors $a^2 \equiv 1(9) \Rightarrow a \equiv 1(9)$ ou $a \equiv 8(9)$,
*si on prend $b \equiv 1(9)$ alors $a^2 \equiv 2(9)$, ce qui est impossible,
*si on prend $b \equiv 2(9)$ alors $a^2 \equiv 5(9)$, ce qui est impossible, etc.
2. On a $a^2 - 250\,507 = b^2$ d'où $a^2 = 250\,507 + b^2 \geq 250\,507 = (500,...)^2 \geq 501^2$ donc $a \geq 501$. Si on avait une solution du type (501 ; b), on aurait $251001 - 250507 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 494$ or 494 n'est pas un carré parfait.
3. a. a est congru à 1 ou 8 modulo 9 et doit être supérieur à 501, lequel est congru à 6 mod 9 ; on peut donc prendre $503 \equiv 8(9)$ ou $505 \equiv 1(9)$.
b. Le plus simple est de faire quelques essais :

a	a^2−250507	$\sqrt{a^2-...}$
505	4518	67,2160695
514	13689	117
523	23022	151,730023
532	32517	180,324707
541	42174	205,363093
550	51993	228,019736
559	61974	248,945777
568	72117	268,546085
577	82422	287,09232

On a donc la première solution pour k = 1, ce qui donne la solution (514, 117).

Partie C

1. On a $250\ 507 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (514-117)(514+117) = 397.631$.
2. Appliquons l'algorithme d'Euclide :

u	v	quotient	reste
631	397	1	234
397	234	1	163
234	163	1	71
163	71	2	21
71	21	3	8
21	8	2	5
8	5	1	3

5	3	1	2
3	2	1	1

Le PGCD est 1, les deux nombres sont premiers entre eux.
3. Cette écriture ne sera pas unique (mis à part $p = 1$, $q = 250507$, par exemple) si 397 n'est pas un nombre premier. Or 397 est premier, la décomposition est bien unique.

1. 16. Suite de restes (c)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.
1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n (\text{modulo } 4)$. En déduire que pour tout entier naturel k,

$$u_{2k} \equiv 2 (\text{modulo } 4) \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 (\text{modulo } 4).$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 (\text{modulo } 100)$.
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Correction

1. On calcule $u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1\,564$, $u_4 = 7\,814$.
On peut conjecturer que $u_{2k} = \ldots 14$ et $u_{2k+1} = \ldots 64$.
2. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n + 36$. Or $24u_n + 36 \equiv 0[4]$, donc

$$u_{n+2} \equiv (u_n + 24u_n + 36)[4] \equiv (u_n + 0)[4] \equiv u_n[4].$$

On en déduit par récurrence que $u_{2k} \equiv u_0[4]$ or $u_0 \equiv 2[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k} \equiv 2[4]$.
De même $u_{2k+1} \equiv u_1[4]$ or $u_1 = 64 \equiv 0[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.
3. a. Au rang 0 : $2u_0 = 28 = 52 + 3$: vrai.
Supposons que pour l'entier n, on ait $2u_n = 5^{n+2} + 3$ alors

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5 \times 2u_n - 12 = 5\left(5^{n+2} + 3\right) - 12 = 5^{n+3} + 15 - 12 = 5^{n+3} + 3.$$

La relation est donc vraie au rang $n + 1$.
b. On a $2u_n = 5^{n+2} + 3$ or $5^n \equiv 1[4] \Rightarrow 5^{n+2} \equiv 25[100]$ en multipliant tout par 25 ; finalement $2u_n \equiv (25 + 3)[100] \equiv 28[100]$.
4. La relation précédente donne $u_n = 14 + 50k, k \in \mathbb{N}$; mais comme $u_{2k} \equiv 2[4]$ et que $14 \equiv 2[4]$, il faut $50k \equiv 0[4]$ et donc lorsque k est pair $u_k \equiv 14[100]$, lorsque k est impair $u_k \equiv 14 + 50[100] \equiv 64[100]$.
5. On voit que le PGCD de 14 et 64 est 2 ; il faut donc montrer que c'est le cas. Comme on a $5u_n - u_{n+1} = 6$, la relation de Bézout montre que PGCD(u_{n+1} ; u_n) est un diviseur de 6. Or 3 divise 3 mais pas 5 donc 3 ne divise pas $2u_n = 5^{n+2} + 3$. Conclusion : PGCD(u_{n+1} ; u_n) = 2.

1. 17. Fibonacci (c)

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.
1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.
b. En déduire que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.
2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs $(a ; b)$ tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.
a. Déterminer a lorsque $a = b$.
b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.
c. Montrer que si $(a ; b)$ est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.
3. a. Montrer que si $(x ; y)$ est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y - x ; x)$ et $(y ; y + x)$ sont aussi des solutions.
b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.
4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, $n \geq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $(a_n ; a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Correction

1. a. Démonstration de cours.

touati.amin@yahoo.fr

b. $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab-b^2=1\\ a^2+ab-b^2=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+b)-b\times b=1\\ b(b-a)-a\times a=1\end{cases}$. Dans les deux cas on peut écrire $au+bv=1$: dans le premier $u=a+v, v=-b$, dans le second $u=b-a, v=-a$.

2. a. $a = b$: $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1 \Leftrightarrow a^4=1 \Rightarrow a=1$ ($a > 0$).

b. (1 ; 1) est déjà fait, (2 ; 3) : $\left(2^2+2.3-3^2\right)^2=1$ et (5 ; 8) : $\left(5^2+5.8-8^2\right)^2=(25+40-64)^2=1$.

c. $a^2+ab-b^2=1$: si on a $a^2-b^2>0$, alors a^2+ab-b^2 ne peut pas valoir 1 ; de même a^2+ab-b^2 ne peut valoir −1 dans ce cas puisqu'il serait positif. Dans tous les cas on a $a^2-b^2<0$.

3. a. $(y-x\,;x)$ est une solution ssi $(x\,;y)$ est une solution :

$$\left((y-x)^2+(y-x)x-x^2\right)^2=\left(y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2\right)^2=\left(y^2-xy+x^2\right)^2=1\ ;$$

Même calcul pour $(y\,;y+x)$.

b. (2 ; 3) est solution donc $(3-2\,;2)=(1\,;2)$ et $(3\,;3+2)=(3\,;5)$ en sont ; (5 ; 8) est solution donc $(8-5\,;5)=(3\,;5)$ et $(8\,;5+8)=(8\,;13)$ en sont ; on a les nouvelles solutions : $(1\,;2)$, $(3\,;5)$ et $(8\,;13)$.

4. $a_0=a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Démonstration par récurrence : supposons que $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution, alors $(y\,;y+x)=(a_{n+1}\,;a_n+a_{n+1})=(a_{n+1}\,;a_{n+2})$ est solution d'après le 3. a. Comme c'est vrai au rang 0 : (1 ; 1) est solution, c'est toujours vrai.

La question 1. b. justifie alors que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

<u>Remarque</u> : ce n'est pas la façon la plus rapide de montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux : soient u_{n+1} et u_n deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Alors $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$; soit d un diviseur commun positif de u_{n+1} et u_n ; alors d divise u_{n-1}, donc d est un diviseur commun de u_n et u_{n-1}.
En itérant (et en descendant), il vient : d est un diviseur commun de $u_1 = 1$ et $u_0 = 1$ donc $d = 1$ et u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

<u>1. 18. QCM (c)</u>

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.
1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.
3. Pour tout n de ℕ*, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9.
4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation : $24x + 35y = 9$ est l'ensemble des couples : $(-144+70k\,;\,99-24k)$ où $k \in$ ℤ.
5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = iz + (1-i)$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

<u>Correction</u>

1. **Vrai** : 4 002 = 2 004×1+1 998 ; 2 004 = 1 998×1+6 ; 1 998 = 6×336. Le dernier reste non nul est bien 6.

2. **Vrai** : $2^{pq}-1=\left(2^p\right)^q-1=\left(2^p\right)^q-1$; or $a^m-1=(a-1)\left(a^{m-1}+a^{m-2}+\ldots+1\right)$.

3. **Faux** : contre-exemple : $2^6 - 1 = 63$ est divisible par 9.

4. **Faux** : les méthodes habituelles donnent les solutions $(35k - 144\,;\,99 - 24k)$, $k \in$ ℤ.

5. **Faux** : soit M un point du plan ; son image M_1 par f vérifie $\overrightarrow{AM_1}=3\overrightarrow{AM}$. Puis l'image M' de M_1 par g vérifie $\frac{1}{3}\overrightarrow{BM_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM_1}\right)=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\times 3\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

6. **Vrai** : les points invariants vérifient $z=iz+(1-i)$, soit avec $z = x + iy$, $x+iy=ix-y+1-i$, soit $x+y-1+i(y-x+1)=0 \Leftrightarrow x+y-1=0$ qui est bien l'équation d'une droite.

<u>1. 19. Fermat et Bézout (c)</u>

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})=x^k-1\ .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu - nv = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d = a^d - 1$. Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

Correction

1. On redémontre le théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique : on développe $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = (x+x^2+...+x^k)-(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = x^k - 1$.

2. a. $n = dk$. Remplaçons x par a^d dans la relation précédente :

$$(a^d-1)(1+a^d+a^{2d}+...+a^{d(k-1)}) = a^{dk}-1 = a^n - 1.$$

$a^d - 1$ est en facteur dans $a^n - 1$, c'en est bien un diviseur.

b. On effectue la décomposition en facteurs premiers de 2004 : $2004 = 2^2.3.167$ donc $2^{2004}-1$ est divisible par $2^2-1=3, 2^3-1=7, 2^4-1=15, 2^6-1=63, 2^{12}-1=4095, ...$ $2^{2004}-1$ est donc divisible par 7 et 63 ; comme 9 divise 63 il divise également $2^{2004}-1$.

3. a. Bézout dit : m' et n' sont premiers entre eux si et seulement si il existe u et v tels que $um'+vn'=1$ (ou $um'-vn'=1$). On multiplie tout par d : $udm'+vdn'=d$, soit $um+vn=d$ (ou $um-vn=d$).

b. Développons :

$$a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d = a^d-1 \Leftrightarrow a^{mu}-a^{nv+d} = 0 \Leftrightarrow a^{mu} = a^{nv+d} \Leftrightarrow mu = nv+d \Leftrightarrow mu-nv = d.$$

Divisons la relation $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d = a^d-1$ par $D = a^d - 1$: $\left(\frac{a^{mu}-1}{a^d-1}\right)-\left(\frac{a^{nv}-1}{a^d-1}\right)a^d = 1$; ceci montre qu'il existe deux entiers tels que $1.A - a^d.B = D$ où $A = \frac{a^{mu}-1}{a^d-1}$ et $B = \frac{a^{nv}-1}{a^d-1}$. A et B sont donc premiers entre eux et D est le PGCD de A et B.

c. Le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$ est obtenu en passant par le PGCD de 63 et 60 qui est $d = 3$. On a alors $1.63-1.60=3$ d'où en prenant $a = 2$: $A = 2^{63}-1$, $B = 2^{60}-1$ et $D = 2^3-1 = 7$.

<u>1. 20. Suite (c)</u>

1. a. Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que : $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

a. Que valent a_1 et b_1 ? D'après les calculs de la question 1. a., donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

b. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1}+b_{n+1}$. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

d. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux. En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction

1. a. $\left(1+\sqrt{6}\right)^2 = 1+2\sqrt{6}+6 = 7+2\sqrt{6}$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4 = \left(7+2\sqrt{6}\right)^2 = 73+28\sqrt{6}$,

$\left(1+\sqrt{6}\right)^6 = \left(73+28\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right) = 847+342\sqrt{6}$ ..

b. $847 = 342\times 2+163 ; 342 = 163\times 2+16 ; 163 = 16\times 10+3 ; 16 = 3\times 5+1$ donc 847 et 342 sont premiers entre eux.

2. $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

a. $a_1 = 1, b_1 = 1$; $a_2 = 7, b_2 = 2$; $a_3 = 73, b_3 = 28$, etc.

b. $a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{6} = \left(a_n+b_n\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right) = a_n+6b_n+\left(a_n+b_n\right)\sqrt{6}$ donc $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

c. $a_{n+1}+b_{n+1} = 2a_n+7b_n = 2\left(a_n+b_n\right)+5b_n$; comme $5b_n$ est divisible par 5, si 5 ne divise pas a_n+b_n, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1}+b_{n+1}$. Par ailleurs 5 ne divise pas $a_1+b_1=2$ donc par récurrence 5 ne divise pas a_n+b_n.

d. $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n \\ 6b_{n+1} - a_{n+1} = 5a_n \end{cases}$.

Comme il est clair que a_n et b_n sont entiers, $a_{n+1}-b_{n+1}$ et $6b_{n+1}-a_{n+1}$ sont divisibles par 5.

Si a_{n+1} et b_{n+1} ne sont pas premiers entre eux, il existe k tel que $a_{n+1}=k\alpha$, $b_{n+1}=k\beta$ (k ne peut être un multiple de 5 sinon il se mettrait en facteur dans a_n+b_n qui serait alors divisible par 5). Remplaçons :

$\begin{cases} a_{n+1}-b_{n+1}=5b_n \\ 6b_{n+1}-a_{n+1}=5a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b_n=k(\alpha-\beta) \\ 5a_n=k(6\beta-\alpha) \end{cases}$ d'où a_n et b_n ont un facteur commun ce qui est contradictoire.

Par ailleurs a_2 et b_2 sont premiers entre eux donc par récurrence a_n et b_n sont premiers entre eux.

<u>1. 21. Repunit(c)</u>

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{N}^2$: $11n-24m=1$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du P.G.C.D. de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.

b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9.$$

c. Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$ (on rappelle l'égalité $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul).

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$.

<u>Correction</u>

1. a. $11n-24m=1$: grâce à Bézout, on sait que l'équation a des solutions car 11 et 24 sont premiers entre eux.

b. 24=2.11+2, 11=5.2+1 donc 1=11−5(24−2.11)=11.11−5.24.

Une solution particulière de l'équation est (11, 5).

c. $\begin{cases} 11n-24m=1 \\ 11.11-24.5=1 \end{cases} \Rightarrow (n-11).11=24.(m-5) \Rightarrow \begin{cases} n-11=24k \\ m-5=11k \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$ car 11 et 24 sont premiers entre eux.

2. a. $10^{11}-1$=100 000 000 000 − 1= 9 999 999 999 = 9.1 111 111 111. C'est pareil pour $10^{24}-1$.

b. $\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)=10^{11n}-1-10^{24m+1}+10=10^{11n}-10^{24m+1}+9$; or si (n, m) est solution de (1), on a $11n=24m+1 \Rightarrow 10^{11n}=10^{24m+1} \Rightarrow 10^{11n}-10^{24m+1}=0$.

c. En utilisant $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a^0)$ avec $a=10^{11}$, on a

$$\left(10^{11}-1\right)\left(10^{11(n-1)}+\ldots+1\right)=10^{11n}-1$$

donc $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$. De même $10^{24}-1$ divise $10^{24m}-1$, et il existe N et M tels que :

$$\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)=9 \Leftrightarrow \left(10^{11}-1\right)\underbrace{\left(10^{11n-11}+\ldots+1\right)}_{N}-10\underbrace{\left(10^{24m-24}+\ldots+1\right)}_{M}\left(10^{24}-1\right)=9.$$

d. Soit d un diviseur commun de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$: d divise $\left(10^{11}-1\right)N-\left(10^{24}-1\right)M$ et donc divise 9.

e. Les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9 sont les seuls diviseurs communs de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$. Comme 9 divise $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$, c'est leur PGCD.

<u>1. 22. Bézout (c)</u>

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x+10y=1$.

a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x+10y=412$.

c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n=3^{2n}-1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.

3. On considère l'équation (E'') $A_3x+A_2y=3296$.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').

b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

<u>Correction</u>

1. a. 91 et 10 sont premiers entre eux, l'équation (E) a des solutions d'après Bézout.

b. $x=1$, $y=-9$ est une solution… de (E) donc 412 et −3708 sont des solutions de (E').

c. $\begin{cases} 91x+10y=412 \\ 91\times412-10\times3708=412 \end{cases} \Rightarrow 91(x-412)+10(y+3708)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-412=-10k \\ y+3708=91k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=412-10k \\ y=-3708+91k \end{cases}.$

2. $3^{2n}=\left(3^2\right)^n=9^n\equiv1^n[8]\equiv1[8]\Rightarrow3^{2n}-1\equiv0[8]$.

3. a. $A_3=728$, $A_2=80$, on divise par 8 : $728x+80y=3296 \Leftrightarrow 91x+10y=412$. Les solutions sont celles du 1.c.

b. Il faut que les solutions soient positives : $\begin{cases} x = 412 - 10k \geq 0 \\ y = -3708 + 91k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq 41,2 \\ k \geq 3708 / 91 = 40,7 \end{cases} \Rightarrow k = 41$ et donc l'unique solution est (2 ; 23).

1. 23. Homothétie & multiples (c)

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = -4 - i$.
Soit f la transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

a. Exprimer z' en fonction de z.
b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leq x \leq 8$ et $1 \leq y \leq 8$.
Les coordonnées $(x' ; y')$ de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.
a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.
b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.
c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x' ; y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.
d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?
e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x' ; y')$ qui conviennent.
En déduire les couples $(x ; y)$ correspondant aux couples $(x' ; y')$ trouvés.

Correction

1. a. $z' = 2(z - a) + (z - b) = 3z - 2a - b = 3z - 6 - i$.

b. $z = 3z + 2 - i \Leftrightarrow 2z = -2 + i \Leftrightarrow z = -1 + \frac{1}{2}i$. On a $\overrightarrow{\Omega M'} = 3\overrightarrow{\Omega M}$ donc f est une homothétie de centre Ω et de rapport 3.

2. $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$, et $1 \leq y \leq 8$.
a. $1 \leq x \leq 8$ donc $3\times1+2 \leq x' \leq 3\times8+2 \Leftrightarrow 5 \leq x' \leq 26$
et $1 \leq y \leq 8$ donc $3\times1-1 \leq y' \leq 3\times8-1 \Leftrightarrow 2 \leq y' \leq 23$.
b. $x' - y' = 3x + 2 - 3y + 1 = 3x - 3y + 3 = 3(x - y + 1)$.
c. Si on prend deux entiers pairs ou impairs, la somme est paire, la différence également ; si on prend deux entiers de parité différente, la somme est impaire, la différence également.
d. $m = x'^2 - y'^2 = 60k \Leftrightarrow (x' - y')(x' + y') = 60k$; $x' + y' = 3x + 2 + 3y - 1 = 3x + 3y + 1 = 3(x + y) + 1$.
Si x' et y' sont de parité différente, $x' - y'$ et $x' + y'$ sont impairs et leur produit également ; ce ne peut être un multiple de 60. Donc x' et y' sont de parité identique ; comme $x' - y'$ est un multiple de 3 et pair, c'est un multiple de 6.
Si le nombre $x' - y'$ est un multiple de 30, $x - y + 1$ est un multiple de 10, or x et y sont plus petits que 8, c'est impossible.
e. Comme $x' - y'$ est un multiple de 6 et pas de 30, $x' - y'$ n'est pas divisible par 5 ; pour que $x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60, il faut donc que $x' + y'$ soit divisible par 5 ; comme il est pair, c'est un multiple de 10.

On a alors $\begin{cases} x' - y' = 6p \\ x' + y' = 10q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = 6p + 10q \\ 2y' = 10q - 6p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5q + 3p \\ y' = 5q - 3p \end{cases}$ avec $p = 1$ ou 2 et $q = 1$, 2, 3 ou 4, ce qui donne :

p	q	x'	y'	$x'^2 - y'^2$	x	y
1	1	8	2	60	2	1
1	2	13	7	120	11/3	8/3
1	3	18	12	180	16/3	13/3
1	4	23	17	240	7	6
2	1	11	−1	120	3	0
2	2	16	4	240	14/3	5/3
2	3	21	9	360	19/3	10/3
2	4	26	14	480	8	5

et donc les solutions en x et y : $(2\,;1), (7\,;6), (8\,;5)$. On pouvait le faire rapidement avec Excel…

	y	1	2	3	4	5	6	7	8
	y'	2	5	8	11	14	17	20	23
x	x'								
1	5	21	0	-39	-96	-171	-264	-375	-504
2	8	60	39	0	-57	-132	-225	-336	-465
3	11	117	96	57	0	-75	-168	-279	-408
4	14	192	171	132	75	0	-93	-204	-333
5	17	285	264	225	168	93	0	-111	-240
6	20	396	375	336	279	204	111	0	-129
7	23	525	504	465	408	333	240	129	0
8	26	672	651	612	555	480	387	276	147

1. 24. Congruences, (c)

1. a. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont même reste dans la division par 7.

c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. Soit $u_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, n entier supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$.

b. Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.

c. Déterminer tous les diviseurs de u_6.

Correction

1. a. $3^0 = 1 \equiv 1[7],\ 3^1 = 3 \equiv 3[7],\ 3^2 = 9 \equiv 2[7],\ 3^3 \equiv 3 \times 2[7] \equiv 6[7],\ 3^4 \equiv 4[7],\ 3^5 \equiv 5[7],\ 3^6 \equiv 1[7]$.

Tous les 6 termes on retourne au point de départ.

b. $3^{n+6} - 3^n = 3^n\left(3^6 - 1\right)$ or $3^6 \equiv 1[7]$ donc $3^6 - 1$ est divisible par 7.

c. Divisons 1000 par 6 : $1000 = 6 \times 166 + 4$ donc $3^{1000} = \left(3^6\right)^{166} \times 3^4$; comme $3^6 \equiv 1[7]$ et $3^4 \equiv 4[7]$,on a $3^{1000} \equiv 4[7]$.

d. En divisant n par 6 on a une partie qui sera congrue à 1 et l'autre tombera dans les restes calculés au 1.a.

e. En aucun cas on ne peut trouver un reste nul donc pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. a. On a la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3, de premier terme 1 : $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$.

b. u_n est divisible par 7 lorsque $3^n \equiv 1[7]$, soit lorsque n est un multiple de 6.

c. $u_6 = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(3^3 - 1\right)\left(3^3 + 1\right) = 2^2 \times 7 \times 13$; tous les diviseurs sont donc

1, 13, 7, 91, 2, 26, 14, 182, 4, 52, 28, 364.

1. 25. Bézout, (c)

Le nombre n est un entier naturel non nul ; on pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Complétez le tableau ci-dessous. Quelle conjecture pouvez vous faire sur d ?

n	a	b	d
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			

17			

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.
3. On considère l'équation (E) : $7k - 4n = 3$, où n et k sont deux entiers naturels non nuls.
a. Déterminer une solution particulière de (E), puis tous les couples solutions de (E).
b. En déduire tous les couples d'entiers naturels (n ; k) solutions tels que $4n + 3 = 7k$.
4. Déterminer, à l'aide des congruences, les entiers naturels n tels que $5n + 2$ soit divisible par 7.
5. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Correction

1.

n	a	b	d
8	35	42	7
9	39	47	1
10	43	52	1
11	47	57	1
12	51	62	1
13	55	67	1
14	59	72	1
15	63	77	7
16	67	82	1
17	71	87	1

Il semble que lorsque $n \equiv 1[7]$, $d = 7$ sinon $d = 1$.

2. $5a-4b=20n+15-20n-8=7$. d divise 7 donc $d = 1$ ou $d = 7$.

3. a. (E) : $7k - 4n = 3$: la solution $k = 1$, $n = 1$ est évidente. En appliquant la méthode habituelle on a :
$\begin{cases} 7k-4n=3 \\ 7\times 1-4\times 1=3 \end{cases} \Rightarrow 7(k-1)-4(n-1)=0 \Rightarrow 7(k-1)=4(n-1)$;

comme 4 ne divise pas 7 il divise $k-1$, de même comme 7 ne divise pas 4 il divise $n-1$ et finalement

$$\begin{cases} k-1=4p \\ n-1=7p \end{cases}, p\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1+4p \\ n=1+7p \end{cases}, p\in\mathbb{Z} .$$

b. (n ; k) entiers naturels : $\begin{cases} k=1+4p\geq 0 \\ n=1+7p\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\geq -1/4 \\ p\geq -1/7 \end{cases} \Rightarrow p\geq 0$.

4. a. Avec un petit tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6
$5n$+2 mod 7	2	0	5	3	1	6	4

Donc $5n + 2$ est divisible par 7 lorsque $n\equiv 1[7]$.

5. D'après la question 3. on a $4n+3=7k$ lorsque $n\equiv 1[7]$, de même pour $5n+2=7k$. Lorsque $n\equiv 1[7]$, a et b sont divisibles par 7 qui est alors la valeur de d ; il faut donc $r = 1$.
Pour toutes les autres valeurs de r, ni a ni b ne sont divisibles par 7 et $d = 1$.

<u>1. 26. Eq. dioph (c)</u>

<u>Partie A</u>

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

<u>Partie B</u>

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$\text{(E)} : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel.
On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{Z}$.
1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994. En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

<u>Partie C</u>

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Correction

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

touati.amin@yahoo.fr

On pose $\begin{cases} a = kd \\ b = kd' \end{cases}$ où d est le PGCD de a et b : $a+b = dk+dk' = d(k+k') = 1999(k+k') = 11994 \Rightarrow k+k' = 6$.

Les valeurs possibles de k et k' et celles de a et b sont donc :

k	k'	a	b
0	6	0	11994
1	5	1999	9995
2	4	3998	7996
3	3	5997	5997
4	2	7996	3998
5	1	9995	1999
6	0	11994	0

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$\text{(E)} : n^2 - Sn + 11994 = 0$$

où S est un entier naturel.

1. 3 est solution de (E) ssi $9-3S+11994=0 \Leftrightarrow S=4001$; la deuxième solution est alors 4001−3=3008.

2. 5 est solution de (E) ssi $25-5S+11994=0 \Leftrightarrow 5S=12019$, S n'est pas entier, ça ne colle pas.

3. (E) peut s'écrire également $11994 = Sn-n^2 = n(S-n)$ donc n divise 11994.

Comme $11994 = 6\times 1999 = 2\times 3\times 1999$, n peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 6, 1999, 3998, 5997 et 11994 d'où

S peut prendre les valeurs 2005, 4001, 5999 et 11995.

n	$S-n$	S
1	11994	11995
2	5997	5999
3	3998	4001
6	1999	2005
1999	6	2005
3998	3	4001
5997	2	5999
11994	1	11995

Partie C

Evident... inutile de dépasser $\sqrt{1999} \approx 44{,}7$ ...

<u>1. 27. PGCD (c)</u>

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = x^k - 1 .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu - nv = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d = a^d - 1$. Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

<u>Correction</u>

1. On redémontre le théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique : on développe $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = (x+x^2+...+x^k)-(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = x^k - 1$.

Faut-il faire une récurrence ? A priori oui pour être tout à fait correct, mais le temps passé ne risque pas d'être payé de retour. On se satisfera donc de ceci.

2. a. $n = dk$. Remplaçons x par a^d dans la relation précédente :

$$(a^d-1)(1+a^d+a^{2d}+...+a^{d(k-1)}) = a^{dk}-1 = a^n - 1 .$$

touati.amin@yahoo.fr

a^d-1 est en facteur dans a^n-1, c'en est bien un diviseur.

La question est très classique et a dû être vue en cours.

b. On effectue la décomposition en facteurs premiers de 2004 : $2004=2^2.3.167$ donc $2^{2004}-1$ est divisible par $2^2-1=3, 2^3-1=7, 2^4-1=15, 2^6-1=63, 2^{12}-1=4095, \ldots$ $2^{2004}-1$ est donc divisible par 7 et 63 ; comme 9 divise 63 il divise également $2^{2004}-1$.

Vous pouvez finir la décomposition et trouver tous les facteurs…

3. a. Bézout dit : *m'* et *n'* sont premiers entre eux si et seulement si il existe *u* et *v* tels que $um'+vn'=1$ (ou $um'-vn'=1$). On multiplie tout par *d* : $udm'+vdn'=d$, soit $um+vn=d$ (ou $um-vn=d$).

Le changement de signe n'est pas nécessaire, mais plutôt déstabilisant…

b. Développons :

$$a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^d-1 \Leftrightarrow a^{mu}-a^{nv+d}=0 \Leftrightarrow a^{mu}=a^{nv+d} \Leftrightarrow mu=nv+d \Leftrightarrow mu-nv=d.$$

Divisons la relation $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$ par $D=a^d-1$: $(\frac{a^{mu}-1}{a^d-1})-(\frac{a^{nv}-1}{a^d-1})a^d=1$; ceci montre qu'il existe deux entiers tels que $1.A-a^d.B=D$ où $A=\frac{a^{mu}-1}{a^d-1}$ et $B=\frac{a^{nv}-1}{a^d-1}$. *A* et *B* sont donc premiers entre eux et *D* est le PGCD de *A* et *B*.

c. Le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$ est obtenu en passant par le PGCD de 63 et 60 qui est *d* = 3. On a alors $1.63-1.60=3$ d'où en prenant *a* = 2 : $A=2^{63}-1$, $B=2^{60}-1$ et $D=2^3-1=7$.

1. 28. Premiers (c)

Dans cet exercice *a* et *b* désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $au+bv=1$ alors les nombres *a* et *b* sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ alors *a* et *b* sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (*a* ; *b*) tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer *a* lorsque *a* = *b*.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si (*a* ; *b*) est solution et si $a<b$, alors $a^2-b^2<0$.

3. a. Montrer que si (*x* ; *y*) est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y-x\,;x)$ et $(y\,;y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier *n*, $n\geq 0$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 0$, $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Correction

1. a. Démonstration de cours.

b. $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab-b^2=1 \\ a^2+ab-b^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+b)-b\times b=1 \\ b(b-a)-a\times a=1 \end{cases}$. Dans les deux cas on peut écrire $au+bv=1$: dans le premier $u=a+v, v=-b$, dans le second $u=b-a, v=-a$.

2. a. *a* = *b* : $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1 \Leftrightarrow a^4=1 \Rightarrow a=1$ (*a* > 0).

b. (1 ; 1) est déjà fait, (2 ; 3) : $\left(2^2+2.3-3^2\right)^2=1$ et (5 ; 8) : $\left(5^2+5.8-8^2\right)^2=(25+40-64)^2=1$.

c. $a^2+ab-b^2=1$: si on a $a^2-b^2>0$, alors a^2+ab-b^2 ne peut pas valoir 1 ; de même a^2+ab-b^2 ne peut valoir −1 dans ce cas puisqu'il serait positif. Dans tous les cas on a $a^2-b^2<0$.

3. a. $(y-x\,;x)$ est une solution ssi (*x* ; *y*) est une solution :

$$\left((y-x)^2+(y-x)x-x^2\right)^2=\left(y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2\right)^2=\left(y^2-xy+x^2\right)^2=1\ ;$$

Même calcul pour $(y\,;y+x)$.

b. $(2\,;3)$ est solution donc $(3-2\,;2)=(1\,;2)$ et $(3\,;3+2)=(3\,;5)$ en sont ; $(5\,;8)$ est solution donc $(8-5\,;5)=(3\,;5)$ et $(8\,;5+8)=(8\,;13)$ en sont ; on a les nouvelles solutions : $(1\,;2)$, $(3\,;5)$ et $(8\,;13)$.

4. $a_0=a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Démonstration par récurrence : supposons que $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution, alors $(y\,;y+x)=(a_{n+1}\,;a_n+a_{n+1})=(a_{n+1}\,;a_{n+2})$ est solution d'après le 3. a. Comme c'est vrai au rang 0 : (1 ; 1) est solution, c'est toujours vrai.

La question 1. b. justifie alors que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

<u>Remarque</u> : ce n'est pas la façon la plus rapide de montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux : soient u_{n+1} et u_n deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Alors $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$; soit d un diviseur commun positif de u_{n+1} et u_n ; alors d divise u_{n-1}, donc d est un diviseur commun de u_n et u_{n-1}.

En itérant (et en descendant), il vient : d est un diviseur commun de $u_1=1$ et $u_0=1$ donc $d=1$ et u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

<u>1. 29. suite (c)</u>

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0=14$, $u_{n+1}=5u_n-6$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2}\equiv u_n(\text{modulo }4)$. En déduire que pour tout entier naturel k,

$$u_{2k}\equiv 2(\text{modulo }4)\text{ et }u_{2k+1}\equiv 0(\text{modulo }4).$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n=5^{n+2}+3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n\equiv 28(\text{modulo }100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

<u>**Correction**</u>

$u_0=14$, $u_{n+1}=5u_n-6$.

1. $u_1=5.14-6=64$, $u_2=314$, $u_3=1564$ et $u_4=7814$.

Un coup c'est 64 à la fin lorsque n est impair, un coup c'est 14 à la fin lorsque n est pair.

Notez que pour connaître les deux derniers chiffres d'un nombre il faut pouvoir l'écrire $100A+B$ où A est un entier quelconque et B un entier entre 0 et 99.

2. $u_{n+2}=5u_{n+1}-6=5(5u_n-6)-6=25u_n-36$; or $25\equiv 1(4)$ et $36\equiv 0(4)$ donc $u_{n+2}\equiv 1.u_n(4)\equiv u_n(4)$.

Comme on a $u_0=14=2+12\equiv 2(4)$, par récurrence en utilisant le résultat précédent, on aura $u_2\equiv u_0(4)\equiv 2(4)$, etc. soit $u_{2k}\equiv 2(4)$.

De même $u_1=64\equiv 0(4)\Rightarrow u_3\equiv(0)4\Rightarrow\ldots\Rightarrow u_{2k+1}\equiv 0(4)$.

3. a. Pour $n=0$: $2u_0=28=5^2+3$, ok.

On suppose que $2u_n=5^{n+2}+3$, alors $u_{n+1}=5\dfrac{5^{n+2}+3}{2}-6\Leftrightarrow 2u_{n+1}=5.5^{n+2}+15-12=5^{n+3}+3$; ok.

b. $2u_n\equiv 28(100)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{N},\,2u_n=28+100k$; soit $5^{n+2}+3=28+100k\Leftrightarrow 25.5^n-25=100k\Leftrightarrow 5^n-1=k$.

Comme on peut toujours trouver un entier de la forme 5^n-1, c'est vrai.

4. On a pour n pair : $2u_n=28+\left(5^n-1\right)100\Leftrightarrow u_n=14+\left(\dfrac{5^n-1}{2}\right)100$.

5^n-1 est pair, donc divisible par 2, $\dfrac{5^n-1}{2}$ est donc un entier K et $u_{2p}=14+100K$, ses deux derniers chiffres sont 14.

Si n est impair, soit $n=2p+1$, $u_n=u_{2p+1}=5u_{2p}-6=5\left(14+100K\right)-6=64+500K=64+100K'$ d'où ses deux derniers chiffres sont 64.

touati.amin@yahoo.fr

5. Quel est le PGCD de 14 et 64 ? C'est 2. Il faut donc montrer que le PGCD de u_n et u_{n+1} est 2, soit que $\frac{u_n}{2}=50K+7$ et $\frac{u_{n+1}}{2}=250K+32$ sont premiers entre eux, soit qu'il existe a et b dans tels que $a\frac{u_n}{2}+b\frac{u_{u+1}}{2}=1 \Leftrightarrow a(50K+7)+b(250K+32)=1 \Leftrightarrow 50K(a+5b)+7a+32b=1$.

Lorsqu'on essaie ainsi ça ne marche pas : les valeurs trouvées pour a et b ne sont pas entières... Par contre on peut remarquer que dans $u_{n+1} = 5u_n - 6$ le PGCD de u_{n+1} et u_n doit également diviser 6 ; c'est donc 1, 2, 3 ou 6. Mais 3 ne divise pas $u_n = 5^{n+2}+3$ puisque 3 ne divise pas 5 donc ce n'est ni 3 ni 6, il reste 2 puisque u_n est pair (se termine par 14 ou 64).

touati.amin@yahoo.fr