intégrales

Saidani Moêz

bac maths 2014/2015

Exercice n°1

1. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ et sa fonction dérivée f' est continue sur $[a,b]$.

   Montrer que $\int_a^b xf'(x)dx + \int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a)$.

2. Calculer $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$ et en déduire $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Exercice n°2

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$; $(a < b)$.

1. Justifier l'existence de deux réels m et M tels que pour tout x de $[a,b]$: $m \leq f(x) \leq M$.

2. Démontrer que si $g(x)$ garde un signe constant sue $[a,b]$ $m \leq \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \leq M$.

Exercice n°3

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

1. (a) quel est le signe de $\int_a^b [f(t) + xg(t)]^2 \, dt$ où x désigne un réel?.

   (b) En déduire l'inégalité suivante,appelée de **Schwarz:** $\left[\int_a^b f(t)g(t)dt\right]^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 \, dt \times \int_a^b [g(t)]^2 \, dt$.

2. Démontrer que si f et g sont deux fonctions positives sur $[a,b]$; $(a < b)$ et pour tout x de $[a,b]$: $f(x) \times g(x) \geq 1$ alors $\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \geq (b-a)^2$.

Exercice n°4

pour tout entier n ,on définit les suites x_n et y_n définies par: $x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt, y_n \int_0^1 t^n \sin t dt$.

1. Calculer x_0 et x_1.

   (a) Montrer que les siutes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et quelles sont positives.

   (b) Déduire quelles sont convergentes et calculer leurs limites

2. Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties, que pour tout entier naturel n,

   on a: $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$, et $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$
   En déduire que :$n \lim x_n = \cos(1)$ et $n \lim y_n = \sin(1)$

Exercice n°5

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,on pose $S_n = 1 + e^{it} + ... + e^{i(n-1)t}, t \in]0,\pi[$.

(a) Donner en fonction de t ,une autre expression de S_n.

(b) Déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{n+1}{2}\right)t$

(c) Déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt)dt$.

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt$.

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)dt$.

(c) En déduire que $I_n = \dfrac{1}{n^2}$

3. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \cos kt\right)\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\right] dt = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

4. soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,φ une fonction dérivable sur $[0, \pi]$ et φ' sa dérivée,continue sur $[0, \pi]$

(a) Intégrer ,une fois par parties $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)dt$.

(b) Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi'(t)\cos(xt)dt\right| \leq \displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi'(t)|\, dt$.

(c) En déduire que $\left|\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)dt\right| \leq \dfrac{1}{x}\left[|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi'(t)dt|\right]$

(d) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)dt = 0$

5. Vérifier que pour $t \in [0, \pi]$: $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$

6. On pose $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

(a) Montrer que φ est continue sur $[0, \pi]$

(b) On suppose que φ est dérivable sur $[0, \pi]$ et que sa dérivée est continue sur $[0, \pi]$.

(c) En déduire que $\lim\left(1 + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\pi^2}{6}$

série traitée par LaTeX