THEOREME DE ROLLE

THEOREME SES ACCROISSEMENTS FINIS

saidani moez

bac maths 2014/2014

EXERCICE N°1

soit P la fonction polynômiale définie par $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$

EXERCICE N°2

Soient $f, g :\rightarrow [a, b]$, continues sur $[a, b]$,dérivables sur $[a, b]$.On suppose que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \dfrac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$

On considére pour cela la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = [f(a) - g(a)]\, g(x) - [g(a) - g(b)]\, f(x)$

EXERCICE N°3

Soit P la fonction polynômiale réelle définie par :$P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$.

On suppose que les coefficients de P satisfont la relation: $a_0 + \dfrac{a_1}{2} ... + \dfrac{a_n}{n+1} = 0$

En considérant une primitive de P, montrer que P admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$

EXERCICE N°4

Soit f la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Monter qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c)$

Déterminer les valeurs possibles de c

EXERCICE N°5

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ telle que :

$$f(c) = f(c + \frac{1}{2})$$

EXRCICE N°6

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que $f'(0) = f'(1) = 0$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}$

On pourra utiliser la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x) - 1}{x - 1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha$

EXERCICE N°7

Soient f et g deux fonctions continues sur un fermé $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, telles que $f(a) = g(b)$ $f(b) = g(a); (a < b)$

1. Montrer qu'il existe $\alpha_0 \in [a, b]$ tel que :$f(\alpha_0) = g(\alpha_0)$
2. Montrer qu'il existe $\alpha_1 \in]a, b[$ tel que $f'(\alpha_1) = g'(\alpha_1)$

EXERCICE N°8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

1. Montrer que: si f est paire alors il existe $a \in \mathbb{R}/\ f'(a) = 0$

2. Montrer que: si f est impaire alors il existe $b \in \mathbb{R}/\ f''(b) = 0$

EXERCICE N°9
On donne pour tout $t > 0$. la fonction $f_n : x \mapsto x^n - t(1-x)$

1. Prouver que,pour tout entier naturel n non nul, l'équation: $f_n(x) = 0$ admet une solution et une seule comprise entre entre 0 et 1.Soit U_n cette racine.

2. Montrer que ,pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(U_n) = -t(1-U_n)^2$.

3. Déduire que (U_n) est croissante.

4. En déduire que (U_n) est convergente et **calculer sa limite.**

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014