Exercice n°1 :

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Une solution de l'équation $2z+\bar{z}=9+i$ est :
   a) 3 b) i c) 3+i
2) Soit z un nombre complexe, le conjugué de $1+z$ est :
   a) $1-z$ b) $1+\bar{z}$ c) $1-\bar{z}$
3) Soit z un nombre complexe, $\dfrac{1}{1+z}$ est égal à :
   a) $\dfrac{1+\bar{z}}{|1+z|^2}$ b) $\dfrac{1-z}{|1+z|^2}$ c) $\dfrac{1}{1-iz}$
4) Soit z un nombre complexe. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ d'affixes respectives $z+\bar{z}$ et $z-\bar{z}$ sont :
   a) Colinéaires b) Orthogonaux c) de même longueur .
5) A tout nombre complexe $z\neq-2$, on associe le nombre complexe z' définie par : $z'=\dfrac{z-4i}{z+2}$. On donne les points A et B d'affixes respectives 4i et -2, on a :
   a) Pour tout $z\neq-2$; $|z'|=\dfrac{BM}{AM}$ b) pour tout $z\neq-2$ et $z\neq4i$ $\arg(z')\equiv\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)(2\pi)$
   c) Pour tout $z\neq-2$ et $z\neq4i$ $\arg(z')\equiv\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)(2\pi)$.
6) Soient A et B deux points d'affixes respective i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i|=|z+1|$ est :
   a) La droite (AB) b) le cercle de diamètre [AB] c) La droite perpendiculaire à (AB) passant par O.
7) Soit Ω le point d'affixe 1-i. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1+i|=|3-4i|$ est :
   a) $y=-x+1$ b) $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ c) $(x-1)^2+(y+1)^2=25$.
8) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :
   a) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ b) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ c) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$
9) Soit $z=1+e^{i\alpha}$ avec $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ alors la forme exponentielle de z est :
   a) $2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ b) $-2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ c) $2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$.
10) Le nombre complexe $(1+i)^{10}$ est égale à :
   a) 32i b) 2i c) -1
11) On considère le nombre complexe : $Z=-\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$. Alors on a :
   a) $|Z|=1$ b) $Z=-(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}$. c) $Z=e^{\frac{13i\pi}{12}}$.

Exercice n°2 :

L'exercice comporte trois questions indépendantes. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, une seule réponse est exacte.

		A	B	C	D
1	$Z=\frac{2+4i}{2-i}$	Le point M d'affixe Z est sur le cercle trigonométrique.	$Z=\overline{Z}$	Z est un imaginaire pur.	$Z=\frac{2}{3}i$
2	$Z=\sqrt{3}-i$	Un argument de Z est $-\frac{5\pi}{6}$.	Un argument de $\overline{Z}$ est $\frac{\pi}{6}$	Le point M d'affixe Z est sur le cercle de centre O, de rayon $\sqrt{2}$	Le point M d'affixe Z^2 est sur l'axe des ordonnées.
3	z vérifie $\overline{z}+\|z\|=6+2i$; l'écriture algébrique de z est :	$\frac{8}{3}-2i$	$-\frac{8}{3}-2i$	$\frac{8}{3}+2i$	$-\frac{8}{3}+2i$

Exercice n°3 :

Soit $z=(1+i)^n+(1-i)^n$ avec $n\in IN$.

1) Montrer que z est réel.
2) Ecrire sous forme exponentielle $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$
3) Déduire la valeur de z.

Exercice n°4 :

Soit $z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{2(1-i)}$

1) Mettre z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
2) En déduire $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice n°5 :

On donne $Z_1=1+i\sqrt{3}$ et $Z_2=\sqrt{3}-i$

1) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexe Z_1 et Z_2.
2) Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique Z_1^{21}.

3) Le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

a) Placer les points A,B et C d'affixes respectives Z_1 , Z_2 et $Z = Z_1 + Z_2$.

b) Montrer que OABC est un carré.

c) En déduire le module et un argument de Z.

Exercice n°6 :

Soit $u = \left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

1) Calculer $z = (1-i)u$.

2) Donner la forme exponentielle de z.

3) En déduire la forme exponentielle de u.

4) Calculer u^{18} et u^{36}.

Exercice n°7 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. A tout $z \in C^*$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives : z, $z_B = \dfrac{i}{\bar{z}}$; $z_C = \dfrac{|z|^2 + i}{\bar{z}}$

1) a) Ecrire z_B et z_C sous forme algébrique lorsque $z = 1+i$.

2) b) Placer dans ce cas les points A,B et C dans le plan P et préciser la nature du triangle ABC.

3) a) Montrer que pour tout $z \in C^*$, on a : OABC est un rectangle.

4) b) En déduire que OABC est un carré si et seulement si $|z| = 1$.

5) On pose $z = e^{i\theta}; \theta \in IR$.

a) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle .

b) Déterminer l'ensemble ζ décrit par C lorsque A décrit le cercle trigonométrique.

Exercice n°8 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

A tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe les points M' et M'' d'affixes respectives z' et z'' définies par : $z' = iz$ et $z'' = z^2$.

1) Soit A le point d'affixe $a = 2-i$ et B le point d'affixe $b = 2+i$ .On appelle A' et A'' les points associés à A. On appelle B' et B'' les points associées à B.

a) Déterminer sous forme algébrique, les affixes a' et a'' des points A' et A''. Prouver A est le milieu de [A'A ''].

b) Déterminer sous forme algébrique, les affixes b' et b'' des points B' et B''.

c) Calculer sous forme algébrique , $\dfrac{b-b''}{b-b'}$.

d) En déduire la nature du triangle BB'B''.

2) M est un point quelconque d'affixe $z \neq 0$. N le point d'affixe $\bar{z}$ .N' et N'' sont les points associées au point N. On pose $z = x+iy$.

a) Prouver que si $z \neq 1$, $\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z-1}{i-1}\right)(2\pi)$

b) Montrer alors que M, M' et M'' sont alignés si y = - x + 1.

Exercice n°9 :

1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A,B ,M,M’ et M’’ d’affixes respectives i , -i , m , z’ et z’’ avec $z'=-im-1$ et $z'=m+i$; $m\in\mathbb{C}$. Déterminer l’ensemble Δ des points M d’affixes m tel que OM’=OM’’.
2) a) On suppose que $|m|=\sqrt{2}$. Montrer que le point M’’ appartient à un cercle fixe que l’on précisera.
3) b) On suppose que $\arg(m)\equiv\frac{\pi}{4}(2\pi)$. Montrer alors que le point M’ appartient à une demi droite fixe que l’on précisera.
4) On suppose dans cette question que $|m|=1$, $m\neq i$ et $m\neq -i$
   a) Vérifier géométriquement que le triangle AMB est rectangle en M.
   b) En déduire que le nombre complexe $Z=\dfrac{im+1}{m+i}$ est réel .

Exercice n°10 :

Le plan complexe est muni d’un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm). Soit *I* le point d’affixe 1. On note Γ le cercle de diamètre [*OI*] et on nomme son centre Ω .

A) On pose $a_o=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.
   1) Montrer que le point A_0 appartient au cercle Γ .
   2) Soit *B* le point d’affixe *b*, avec $b=-1+2i$, et *B*’ le point d’affixe *b*’ telle que $b'=a_0b$.
      a) Calculer *b*’.
      b) Démontrer que le triangle *OBB*’ est rectangle en *B*’.

B) Soit *a* un nombre complexe non nul et différent de 1, et *A* son image dans le plan complexe. A tout point *M* d’affixe *z* non nulle, on associe le point *M*’ d’affixe *z*’ telle que $z'=az$.

On se propose de déterminer l’ensemble des points *A* tels que le triangle *OMM*’ soit rectangle en *M*'.

1) Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.
2) Montrer que $(\overrightarrow{M'O}\,;\overrightarrow{M'M})=\arg(\frac{a-1}{a})+2k\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$).
3) En déduire que le triangle *OMM*’ est rectangle en *M*’ si et seulement si *A* appartient au cercle Γ privé de *O* et *I*.

Exercice n°12 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points *A*, *B* et *C* d’affixes respectives $z_A=2$, $z_B=1+i\sqrt{3}$ et $z_C=1-i\sqrt{3}$.

A) 1) a) Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C .
      b) Placer les points *A*, *B*, et *C*.
   2) Déterminer la nature du quadrilatère *OBAC*.
   3) Déterminer et construire l’ensemble Δ des points *M* du plan tels que $|z|=|z-2|$.

B) A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$.

b) En déduire les points associés aux points B et C.

c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2) a) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

b) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de Δ, où Δ est l'ensemble défini à la question 3). de la partie A. Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

Exercice n°13 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2. La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K.

a) Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

b) Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.

c) Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que $z_K = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_H = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-4}{z}$.

2) a) Déterminer et placer les points images de B et C par f.

3) b) On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f.

4) a) Montrer que pour tout point M distinct de O, on a : $OM \times OM' = 4$.

5) b) Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

6) Soient K' et H' les images respectives de K et H par f.

a) Calculer OK' et OH'.

b) Démontrer que $z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Exercice n°14 :

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et -2.Soit l'application f qui à tout point M d'affixe $z \neq -2$ associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+2}$.

1) a) Montrer que pour tout $z \neq -2$; $|z'| = \frac{AM}{BM}$.

2) b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

3) Soit α un réel de l'intervalle $\left]-\pi,\pi\right[$, on suppose que $z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{i\alpha}$.

a) Quel est l'ensemble des points M lorsque α décrit $\left]-\pi,\pi\right[$?

b) Montrer que pour α de $\left]-\pi,\pi\right[$ on a : $z'=\frac{e^{-i\alpha}-1}{e^{-i\alpha}+1}$

c) A quel ensemble appartient le point M' lorsque α décrit l'intervalle $\left]-\pi,\pi\right[$?

Exercice n°15 :

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Dans tout l'exercice, $P\setminus O$ désigne le plan P privé du point origine O.

1) On considère l'application f de $P\setminus O$ dans $P\setminus O$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\frac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

a) Démontrer que pour $z'\neq 0$, on a $\arg(z')\equiv\arg(z)(2\pi)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif. En déduire que, pour tout point M de $P\setminus O$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

b) Déterminer l'ensemble des points M de $P\setminus O$ tels que $f(M) = M$.

c) M est un point du plan P distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.

Établir l'égalité : $\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{1}{i}\left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right)=-i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$. En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$

2) a) Soit z un nombre complexe tel que $z\neq 1$ et $z\neq i$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.

b)Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.