❖ **Ensemble des points M tel que** $OM = r$:

Il faut retenir que : $OM = r \Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre O et de rayon r.

Exemple 1 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|z| = 2\}$.

Exemple 2 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|z - 2i| = 3\}$.

Exemple 3 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|(1+i)z - 2i| = 1\}$.

Exemple 4 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|(1-i)\bar{z} - i| = 3\}$.

❖ **Ensemble des points M tel que :** $\frac{\text{AM}}{\text{BM}} = r$

Il faut retenir que : $M \neq B$; $\frac{AM}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M$ décrit la médiatrice de [AB].

Exemple 1 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|z + 2i| = |z - 1 + i|\}$.

Exemple 2 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $\left|\frac{(1+i\sqrt{3})\bar{z} - 1}{z+i}\right| = 2\}$.

❖ **Ensemble des points M'(z') tel que : z'=*f*(z) est réel ou imaginaire :**

Il faut retenir que :

- z est réel $\Leftrightarrow$ Im(z) = 0 $\Leftrightarrow$ $z = \bar{z}$.
- z est imaginaire $\Leftrightarrow$ Ré(z) = 0 $\Leftrightarrow$ $\bar{z} = -z$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{v}$ est non nul

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow$ $\frac{aff(\vec{u})}{aff(\vec{v})}$ est **réel**.

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** $\Leftrightarrow$ $\frac{aff(\vec{u})}{aff(\vec{v})}$ est **imaginaires.**

Exemple 1 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $z' = \frac{z-1}{z^2} \in IR\}$.

Exemple 2 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $z' = \frac{\bar{z}}{z+i} \in IR\}$.

Exemple 3 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $z' = \frac{iz-2}{z-i} \in iIR\}$.

Exemple 4 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $z' = \frac{(i+1)z-1}{z+i} \in IR\}$

❖ **Ensemble des points M(z) tel que $z = z_0 + e^{i\theta}; \theta \in [\alpha, \beta]; A(z_0)$:**

Il faut retenir que : $z = z_0 + e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - z_0| = 1 \\ \arg(z - z_0) \equiv \theta(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow$ AM =1

$M(z) \in \zeta_{(A(z_0),R)} \Leftrightarrow |z - z_0| = R \Leftrightarrow$ il existe $\theta \in IR, z = z_0 + Re^{i\theta}$

Exemple 1 : Déterminer l'ensemble $E=\{M(z)$ tel que : $z=3+\left(\sqrt{3}+i\right)e^{i\theta};\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\}$

Exercice n°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm). Soit I le point d'affixe 1. On note Γ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω .

On pose $a_o=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

1) Montrer que le point A_0 appartient au cercle Γ .
2) Soit B le point d'affixe b, avec $b=-1+2i$, et B' le point d'affixe b' telle que $b'=a_0b$.
   a) Calculer b'.
   b) Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.
3) Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe. A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=az$.
   On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.
   a) Interpréter géométriquement $\arg(\frac{a-1}{a})$.
   b) Montrer que $(\overrightarrow{M'O}\,;\overrightarrow{M'M})=\arg(\frac{a-1}{a})[2\pi]$ (où $k\in\mathbb{Z}$).
   c) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle Γ privé de O et I.

Exercice n°2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-1+3i$ et $z_B=-2$ et $z_C=-\frac{3-3i}{2}$.

Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distincte de z_A, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\frac{z+2}{z+1-3i}$.

1) Factoriser $z^2-3iz-2$ en remarquant que $z=i$ en est une solution, puis résoudre l'équation (E) : $z^2-3iz-2=0$.
2) Déterminer les affixes des points invariants par f. (Un point est invariant lorsque $z = z'$)
3) Déterminer l'ensemble des points M tels que M ' appartienne au cercle de centre O de rayon 1.
4) En posant $z=x+iy$, déterminer Im(z') en fonction de x et y. En déduire l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.
5) a) Montrer que pour tout z différent de $-1+3i$ on a l'équivalence suivante :

$$\frac{z+2}{z+1-3i}=-\frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1+3i}\Leftrightarrow(z-z_C)(\overline{z-z_C})=\frac{5}{2}.$$

   b) En déduire l'ensemble des points M tels que M' ait une affixe imaginaire pure